Lista 3 - teoria dystrybucji

1 Podstawowe własności dystrybucji

1. Dla poniższych ciągów funkcyjnych, ($n \to \infty,\ \epsilon \to 0$)

   - sprawdź, czy istnieje granica w sensie funkcyjnym
   - sprawdź, czy istnieje granica w sensie dystrybucyjnym
   - jeśli obie istnieją, jak się mają do siebie? Czy potrafisz uzasadnić, dlaczego?

   Możesz najpierw spróbować zwizualizować te funkcje korzystając z programów graficznych (np. Wolfram Mathematica, GnuPlot, internetowy kalkulator graficzny Desmos itp.) i pobawić się nimi trochę.

   $(a)\ f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}, & |x| \leqslant \epsilon \\ 0, & |x| > \epsilon \end{cases}$ $\qquad (b)\ f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\pi x}$

   $(c)\ f_n(x) = \begin{cases} ne^{\frac{1}{n^2x^2-1}}, & |x| < \frac{1}{n} \\ 0, & |x| \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$ $\qquad (d)\ f_n(x) = \sin(nx)$

   $(e)\ f_n(x) = \begin{cases} n^2, & |x| < \frac{1}{n} \\ 0, & |x| \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$ $\qquad (f)\ f_n(x) = \arctan(nx) + \dfrac{\pi}{2}$

2. Uogólnij wynik zadania 8.2, tzn. dla $n \in \mathbb{N}$ oblicz pochodną dystrybucyjną delty Diraca.
$$\delta^{(n)}(\phi) = ?$$

3. Udowodnij, że jeśli $f \in L^1_{loc}$, zaś $g \in \mathcal{C}^\infty$, to dla dystrybucji regularnej zachodzi:
$$T'_{fg} = T_{f'g} + T_{fg'}$$

4. Niech $f \in L^1_{loc}$, zaś $g \in \mathcal{C}^\infty$ oraz dodatkowo, niech g będzie bijekcją taką, że pochodna funkcji odwrotnej istnieje prawie wszędzie. Udowodnij, że dla dystrybucji regularnej zachodzi wówczas:
$$T'_{f\circ g} = T_{(f'\circ g)g'}$$

5. Policz pochodne poniższych dystrybucji.

   $(a)\ T_f, \quad f(x) = |x| \qquad (b)\ T_f, \quad f(x) = \text{sgn}(x)$

6. Uogólnij zadanie 8.3, tzn. dla $n \in \mathbb{N}$ oblicz transformatę Fouriera dystrybucji regularnej zadanej przez $f(x) = x^n$.

7. Policz trarnsformaty Fouriera następujących dystrybucji

   $(a)\ T_f, \quad f(x) = e^{ix} \qquad (b)\ \delta \qquad (c)\ \delta_\alpha$

8. Niech $f * g$ to splot funkcji całkowalnych $f,\ g$. Rozważ dystrybucję zadaną przez ten splot, pokaż że zachodzą relacje:

$$T_{f*g}(\phi) = T_f(\check{g} * \phi) = T_g\left(\check{f} * \phi\right)$$

z $\check{f}(x) = f(-x)$

9. Definiujemy mnożenie dystrybucji T przez funkcję $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ poprzez:

$$(a \cdot T)(\phi) := T(a \cdot \phi)$$

Wykaż następujące własności:

$$(a)\ a \cdot \delta = a(0)\ \delta$$
$$(b)\ \forall m \in \mathbb{N}:\ x^m \delta^{(m)} = (-1)^m m!\ \delta$$
$$(c)\ \forall m, k \in \mathbb{N},\ k < m:\ x^k \delta^{(m)} = 0$$

10. Wprowadźmy definicje:

- ☛ Mówimy, że dystrybucja T zanika na zbiorze U, jeśli dla każdej funkcji f takiej że $\mathrm{supp}(f) \subset U$ zachodzi $T(f) = 0$.
- ☛ Nośnikiem dystrybucji T nazwiemy dopełnienie największego zbioru, na którym T zanika.
- ☛ Niech dana będzie funkcja całkowalna[1] $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Niech T to dystrybucja działająca na funkcje jednego argumentu. Przez ${}_{(x)}T(\varphi(x, y))$ oznaczymy dystrybucję T działającą na funkcję dla ustalonego y.
- ☛ Przez splot dystrybucji T z funkcją $\phi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rozumiemy:

$$T * \phi(y) :=_{(x)} T(\phi(y - x))$$

Z takim zapleczem:

- ☞ Jakie są nośniki poznanych ci dystrybucji?
- ☞ Pokaż, że dla dystrybucji regularnych zachodzi

$$T_f * \phi = f * \phi$$

- ☞ Pokaż, że

$$\delta \star \phi = \phi$$

- ☞ Niech nośnikiem dystrybucji T będzie skończona suma odcinków obustronnie domkniętych[2] Pokaż, że jeśli funkcja ϕ jest wielomianem, to również $T * \phi$ jest wielomianem. Pokaż, że jeśli funkcja ϕ jest eksponencjalna, to $T * \phi$ również. Jeśli masz problem, spróbuj na początku ograniczyć się do dystrybucji regularnych i przeanalizować, które warunki powyższego twierdzenia wynikaja z czego.

[1] Na potrzeby tej definicji, zauważymy jednak później, że nałożenie ograniczeń na dystrybucje może znieść konieczność tego warunku.

[2] W takich twierdzeniach zazwyczaj mówi się o zbiorach zwartych, dla których powyższe są szczególnym przypadkiem, jednak na potrzeby naszych ćwiczeń, ograniczmy się wyłącznie do takich sum.

11. Przypomnij sobie, co oznaczają: funkcje szybko malejące, oraz dystrybucje wolno rosnące. Na przykładzie funkcji $\phi(x) = e^{-x^2}$ uzasadnij, że dystrybucja:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2} \delta_n$$

nie jest dystrybucją wolno rosnącą. Spróbuj skonstruować inne pary jako powyżej: dystrybucja oraz funkcja szybko malejąca udowadniająca że dystrybucja nie jest wolno rosnąca.

Dodatkowo, na potrzeby kolejnych kursów: deltę Diraca uogólnia się na wyższe wymiary poprzez:

$$\delta^n(f(\vec{x}) = f(\vec{0})$$

gdzie n to wymiar przestrzeni liniowej. Dla trzech wymiarów w fizyce często stosuje się zapis:

$$"\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta^3(\vec{x})"$$

gdzie Δ oznacza operator Laplace'a, zaś r to współrzędna promieniowa $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Spróbuj uzasadnić powyższe "równanie".