Lista 2 - szeregi i funkcje specjalne

1 Metoda szeregów

1. **Powtórka z analizy matematycznej 1:** Dla poniższych funkcji, policz szeregi Taylora w danym punkcie $x = x_0$. Wyznacz resztę. Określ, na jakim przedziale szereg jest zbieżny.

(a) $\begin{cases} f(x) = e^x \\ x_0 = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} f(x) = \sin(x) \\ x_0 = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1-x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} f(x) = \ln(1+x) \\ x_0 = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} f(x) = e^{2x} \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$ (f) $\begin{cases} f(x) = \frac{2}{x+1} \\ x_0 = 3 \end{cases}$

2. W metodzie szeregów uzyskujemy relacje rekurencyjne na kolejne wyrazy. Często jednak możliwym jest zapisanie ich bezpośrednio jako funkcja indeksu sumowania, np.:

$$a_{n+1} = (n+1)a_n \implies a_n = n!\, a_0$$

Poniżej przedstawiono wyrazy ciągów (niezwiązanych z szeregami funkcyjnymi) definiowane rekurencyjnie. Sprowadź je do postaci jawnej, zależącej wyłącznie od argumentu i początkowego wyrazu.

(a) $a_{n+1} = a_n$ (b) $a_{n+1} = a_n + n + 1$ (c) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+5}$

(d) $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+9}a_n$ (e) $a_{n+1} = (a_n)^n$ (f) $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n}a_n$

(g) $a_{n+2} = \dfrac{(-1)^n}{n}a_n$ (h) $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

3. Równanie różniczkowe ma postać:

$$x''(t) + P(t)x'(t) + Q(t)x(t) = 0$$

gdzie funkcje P, Q podane są niżej.

- ☛ Wykorzystując metodę szeregów, rozwiąż te równania różniczkowe.
- ☛ Podaj zakres stosowalności rozwiązania.
- ☛ Gdy otrzymasz relację rekurencyjną na współczynniki, spróbuj zapisać je bezpośrednio w funkcji n, jak w zadaniu wyżej.
- ☛ W których z rozwiązań rozpoznajesz wyrażenia na znane ci funkcje?

(a) $\begin{cases} P(t) = 0 \\ Q(t) = -1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} P(t) = -t^2 \\ Q(t) = -1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} P(t) = -\frac{1}{1-t} \\ Q(t) = -\frac{1}{(1-t)^2} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} P(t) = \frac{1}{1+t} \\ Q(t) = 0 \end{cases}$

2 Funkcje Legendre'a

1. Policz wielomiany Legendre'a 0,1,2,3 stopnia, korzystając ze wzoru Rodriguesa:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} \left\{ \left(t^2 - 1 \right)^n \right\}$$

2. Korzystając z wyniku wyżej, policz funkcje Legendre'a drugiego rodzaju stopnia 0,1,2.

3 Funkcje Hermite'a

Uwaga, choć funkcje Hermite'a nie są bezpośrednio elementem tego kursu, również są rozwiązaniem szeregowym równania różniczkowego. Mają też kilka własności, na których można przećwiczyć zdolności liczenia i dowodzenia. Stąd, pomimo że nie musicie ich Państwo znać, umieszczam kilka zadań.

Własności wielomianów Hermite'a H_n:

- są rozwiązaniami równania różniczkowego Hermite'a:

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0$$

- Można je otrzymać ze wzoru Rodriguesa:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ e^{-x^2} \right\}$$

- Funkcja tworząca:

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) t^n$$

Zadania:

1. Korzystając ze wzoru Rodriguesa, policz wielomiany Hermite'a stopnia 0,1,2,3. Sprawdź bezpośrednim rachunkiem, że spełniają one równanie Hermite'a.

2. Udowodnij relację rekurencyjną:

$$n > 0: \; H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

3. Policz wyznacznik Wrońskiego dla równania Hermite'a.

4. Zbadaj parzystość wielomianów Hermite'a.

4 Funkcje Bessela

Równanie Bessela dane jest jako:

$$0 = x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) \tag{1}$$

1. Znajdź "punkty" osobliwe równania Bessela. Czy któryś z nich jest regularny?

2. Wprowadzając operator oraz funkcję:

$$D := x\frac{d}{dx}, \qquad Y(x) = y(x) \cdot x^{-\nu}$$

pokaż, że poniższe równania są alternatywnymi postaciami równania Bessela (1):

$$(D^2 - \nu^2)y(x) + x^2 y(x) = 0 \tag{2}$$
$$D^2 Y(x) + 2\nu DY(x) + x^2 Y(x) = 0 \tag{3}$$

3. Sprawdź bezpośrednim rachunkiem, że funkcja:

$$J_{1/2}(t) = \frac{\sqrt{2}\sin(t)}{\sqrt{\pi t}}, \qquad J_{-1/2}(t) = \frac{\sqrt{2}\cos(t)}{\sqrt{\pi t}}$$

jest rozwiązaniem równania Bessela dla $\nu = \pm 1/2$

4. Wiedząc, że funkcja tworząca funkcji Bessela 1. rodzaju dana jest jako:

$$\exp\left(\frac{t}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(t)x^n, \qquad x \neq 0 \tag{4}$$

wyprowadź wzory:

$$J_n'(t) = \frac{1}{2}\Big(J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t)\Big) \tag{5}$$
$$2nJ_n(t) = t\Big(J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t)\Big) \tag{6}$$

5. Korzystając ze wzorów (5), (6) udowodnij poniższą relację:

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\pm n} J_n(t)\right) = \pm t^{\pm n} J_{n\mp 1}(t) \tag{7}$$

oraz jej implikację:

$$\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^{\pm n} J_n(t)\right) = (\pm 1)^m\, t^{\pm n - m} J_{n\mp m}(t) \tag{8}$$

6. Odwołując się do szeregu definiującego funkcję Bessela 1. rodzaju:

$$J_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu} \tag{9}$$

wykaż

- ☛ poprzez oszacowanie, że dla $\nu \notin \mathbb{Z}$ funkcje te są liniowo niezależne
- ☛ dla $\nu \in \mathbb{Z}$, że funkcje te są liniowo zależne.

7. Funkcje:

$$I_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu} \tag{10}$$

są rozwiązaniami tzw. zmodyfikowanego równania Bessela:

$$t^2 x''(t) + t x'(t) - (t^2 + \nu^2) x(t) = 0$$

Udowodnij, że spełniają następujące relacje:

$$I_\nu(t) = i^{-\nu} J_\nu(it) \tag{11}$$

$$I_{-m}(t) = I_m(t), \quad m \in \mathbb{N} \tag{12}$$

8. Korzystając z podstawienia $x(t) = y(t)/t$, znajdź rozwiązanie poniższego równania różniczkowego:

$$x''(t) + \frac{3}{t} x'(t) + \left(j^2 + \frac{1}{t^2}\right) x(t) = 0$$

9. Korzystając z podstawienia $x(t) = y(t)/\sqrt{t}$, znajdź rozwiązanie poniższego równania różniczkowego:

$$t^2 x''(t) + 2t x'(t) + \left(9t^2 + \frac{1}{4}\right) x(t) = 0$$

10. Korzystając z podstawienia $t = s^2$, znajdź rozwiązanie poniższego równania różniczkowego:

$$t x''(t) + x'(t) + \frac{x(t)}{4} = 0$$

11. Udowodnij, że funkcja Γ Eulera spełnia własność silni, tzn.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

5 Równania różniczkowe cząstkowe

Niech $u \equiv u(x,t)$. Wprowadźmy uproszczoną notację:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \partial_t u$$

1. Rozwiąż poniższe równania różniczkowe. W tym celu scałkuj je po odpowiedniej zmiennej.

   (a) $\partial_x u = 1$ $\qquad$ (b) $\partial_x u = t^5$ $\qquad$ (c) $\partial_x u = f(t)u$

   (d) $\partial_x u = 3x^2 + t$ $\qquad$ (e) $\partial_x \partial_x u = 2$ $\qquad$ (f) $\partial_x \partial_t u = 1$

2. Rozwiąż poniższe równania cząstkowe, na przykład znajdując odpowiednie podstawienie:

   (a) $\partial_x \partial_t u + 3\partial_x u = 0$ $\qquad$ (b) $\partial_x \partial_x u - \partial_x u - t = 0$ $\qquad$ (c) $\partial_t u - \partial_t \partial_t u = x$

3. Rozwiąż poniższe zagadnienie różniczkowo-brzegowe:

$$\begin{cases} \partial_x \partial_t u + 2t\partial_x u - 4tx = 0 \\ u(x,0) = x^2 + e^{x^2} \\ u(0,t) = e^{-t^2} - t^2 \end{cases}$$

4. Rozwiąż poniższe równania różniczkowe, zakładając rozdzielenie zmiennych:

$$(a)\ \partial_t u = \alpha \partial_x u \qquad (b) \begin{cases} \partial_t u - \partial_x \partial_x u = 0 \\ \partial_x u(0,t) = 0 \\ \partial_x u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} \partial_x \partial_x u - 9\partial_t \partial_t u = 0 \\ u(x,0) = x \\ \partial_x u(x,0) = 0 \end{cases}$$