

Kolokwium 2 - poprawa

04/02/2026

1. Rozwiąż jeden z poniższych podpunktów:

(a) Rozwiąż poniższe równanie:

$$y''(t) + e^{2t}y(t) = 0$$

Podpowiedź: podstaw $t = \ln(s)$, tzn. $y(t) = y(\ln s) = x(s)$

(b) Wykaż, że zachodzi:

$$1 = J_0(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(t)$$

2. Niech zadana będzie funkcja $f_+ : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f_+(x) = \begin{cases} x - \pi, & x < \pi \\ 0, & x \geq \pi \end{cases}$$

Oblicz jej nieparzyste rozszerzenie f na cały zbiór liczb rzeczywistych, a następnie policz szereg Fouriera f na przedziale $[-\pi, \pi]$

3. Rozwiąż jeden z poniższych podpunktów

(a) Policz transformatę Fouriera funkcji:

$$f(x) = e^{-|x|}$$

(b) Udowodnij, że transformata Fouriera funkcji parzystej jest funkcją rzeczywistą.

4. Rozwiąż jeden z poniższych podpunktów:

(a) Policz pochodną dystrybucji regularnej zadanej przez funkcję:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 2, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

(b) Policz transformatę fourierowską dystrybucji regularnej zadanej przez funkcję:

$$f(x) = e^{ix\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Przykładowe rozwiązania

1. (a) Stosując sugerowane podstawienie obliczamy pochodne:

$$\begin{aligned}x(s) &= y(\ln s) \\x'(s) &= \frac{d}{ds}y \circ \ln(s) = y'(\ln s) \cdot \frac{d \ln(s)}{ds} = y'(t) \cdot \frac{1}{s} \\x''(s) &= \frac{d}{ds} \left(\frac{y'(t)}{s} \right) = \frac{y''(t)}{s^2} - \frac{y'(t)}{s^2} = \frac{y''(t)}{s^2} - \frac{x'(s)}{s} \\&\implies y''(t) = s^2 x''(s) + s x'(s)\end{aligned}$$

Zatem, podstawiając do równania, uwzględniając również że $t = \ln(s) \implies s = e^t$:

$$\begin{aligned}0 &= y''(t) + e^{2t}y(t) \\&= s^2 x''(s) + s x'(s) + s^2 x(s) \\&= s^2 x''(s) + s x'(s) + (s^2 - 0^2)x(s)\end{aligned}$$

a zatem rozwiązaniem ogólnym na $x(s)$ jest:

$$x(s) = c_1 J_0(s) + c_2 Y_0(s)$$

wracając zaś do oryginalnej zmiennej i oryginalnej funkcji:

$$y(t) = x(e^t) = c_1 J_0(e^t) + c_2 Y_0(e^t)$$

- (b) Korzystając z funkcji tworzącej:

$$\exp\left(\frac{t}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(t) x^n, \quad x \neq 0$$

podstawmy $x = 1$:

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{t}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)\Bigg|_{x=1} &= \exp\left(\frac{t}{2}\left(1 - \frac{1}{1}\right)\right) = e^0 = 1 \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(t) x^n \Bigg|_{x=1} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(t) = J_0(t) + \sum_{n \in \mathbb{N}} (J_n(t) + J_{-n}(t))\end{aligned}$$

Wiemy również, że dla całkowitych n zachodzi $J_{-n} = (-1)^n J_n$, zaś

$$1 + (-1)^n = \begin{cases} 2, & n - \text{parzyste} \\ 0, & n - \text{nieparzyste} \end{cases}$$

stąd, podstawiając obie strony dostajemy:

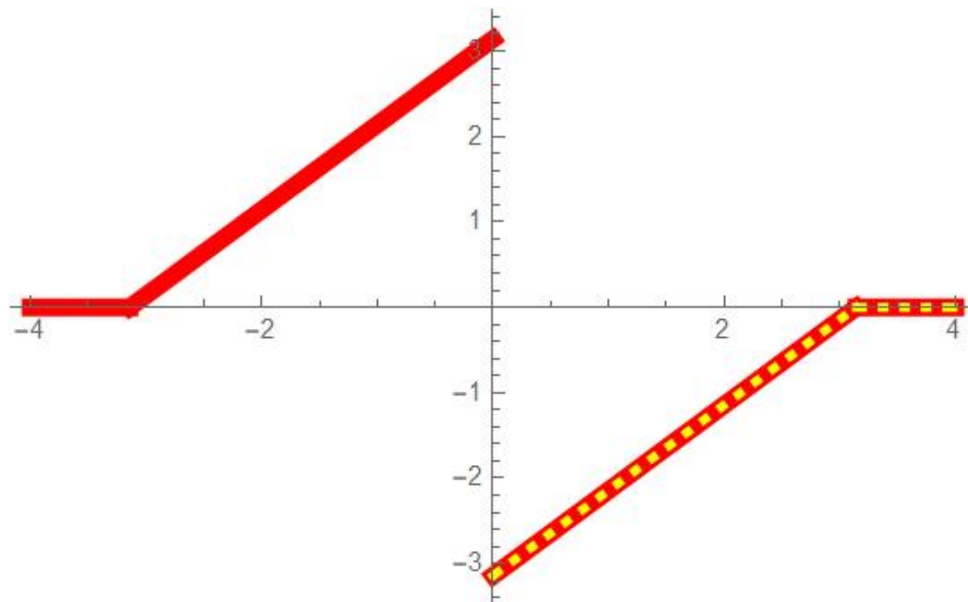
$$1 = J_0(t) + \sum_{n \in \mathbb{N}} 2J_{2n}(t) + \sum_{n \in \mathbb{N}} 0J_{2n-1}(t)$$

$$1 = J_0(t) + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} J_{2n}(t)$$

2. Nieparzystym rozszerzeniem funkcji f_+ będzie:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \pi \vee x = 0 \\ x - \pi, & x \in (0, \pi) \\ x + \pi, & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

Ponieważ jest to rozszerzenie nieparzyste, a szereg Fouriera ma być policzony na



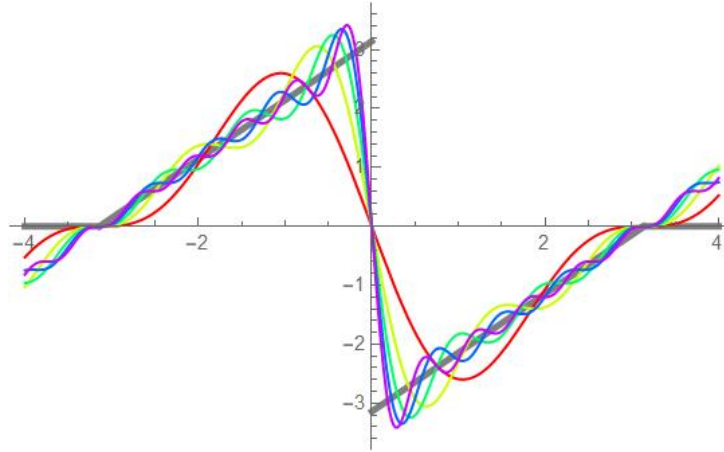
Rysunek 1: Na żółto (przerywane) - funkcja oryginalna f_+ , na czerwono - jej nieparzyste rozszerzenie

przedziale symetrycznym $[-\pi, \pi]$, zatem współczynniki cosinusowe wszystkie wynoszą 0, zatem pozostaje nam policzyć współczynniki sinusowe. Zauważmy przy tym, że skoro funkcja f jest nieparzysta, to funkcja $f(x) \sin(nx)$ jest parzysta, zatem skorzystamy z tej symetrii:

$$\begin{aligned} B_n &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(-(x - \pi) \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-1}{n} \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \Big|_{x=0}^{x=\pi} \right) \\ &= -\frac{2}{n} \end{aligned}$$

Stąd poszukiwany szereg Fouriera:

$$f(x) \sim -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$



Rysunek 2: Na szaro - funkcja, na czerwono - pierwsze 2 wyrazy szeregu, na żółto-zielono - pierwsze 4 wyrazy szeregu, na cyjanowo-seledynowo - pierwsze 6 wyrazów szeregu, na granatowo - pierwsze 8 wyrazów szeregu, na fioletowo - pierwsze 10 wyrazów szeregu.

3. (a) Korzystając bezpośrednio z definicji:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^x e^{-i\omega x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x(1+i\omega)} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{x(1-i\omega)} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)} \Big|_{x=0}^{x \rightarrow \infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{x(1-i\omega)}}{1-i\omega} \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x=0} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-i\omega} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-i\omega + 1+i\omega}{(1+i\omega)(1-i\omega)} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}$$

(b) Niech $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją parzystą, tzn.:

$$g(-x) = g(x)$$

Policzmy sprzężenie transformaty Fouriera tej funkcji:

$$\begin{aligned}
 \overline{\widehat{g}(\omega)} &= \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\omega x} dx \\
 &\quad \left| \begin{array}{l} t = -x \implies dx = -dt \\ x \rightarrow \pm\infty \implies t \rightarrow \mp\infty \end{array} \right| \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} g(-t) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt
 \end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku użyliśmy parzystości g oraz zamiany granic. Otrzymujemy zatem, że:

$$\forall \omega \in \mathbb{R} : \widehat{g}(\omega) = \overline{\widehat{g}(\omega)}$$

co zachodzi wyłącznie dla funkcji rzeczywistych i tym samym kończy dowód.

4. (a) Dystrybucja regularna zadana przez funkcję f zdefiniowana jest jako:

$$T_f(\phi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(x) dx$$

Zaś pochodna dowolnej dystrybucji T :

$$T'(\phi) := -T(\phi')$$

zatem:

$$\begin{aligned}
 T'_f(\phi) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi'(x) dx \\
 &= - \int_{-\infty}^{-1} 2\phi'(x) dx - \int_{-1}^1 \phi'(x) dx - \int_1^{\infty} 2\phi'(x) dx \\
 &= -2\phi(x) \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x=-1} - \phi(x) \Big|_{x=-1}^{x=1} - 2\phi(x) \Big|_{x=1}^{x \rightarrow \infty} \\
 &= -2(\phi(-1) - 0) - (\phi(1) - \phi(-1)) - 2(0 - \phi(1)) \\
 &= -\phi(-1) + \phi(1) \\
 &= \left(\delta_1 - \delta_{-1} \right) (\phi)
 \end{aligned}$$

stąd wniosek:

$$T'_f = \delta_1 - \delta_{-1}$$

- (b) Dystrybucja regularna zadana przez funkcję f zdefiniowana jest jako:

$$T_f(\phi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(x) dx$$

Zaś transformata fourierowski dowolnej dystrybucji T :

$$\widehat{T}(\phi) := T\left(\widehat{\phi}\right)$$

Stąd:

$$\begin{aligned}\widehat{T}_f(\phi) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{\phi}(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\widehat{\phi}(x)dx \\ &= \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\widehat{\phi}(x)dx \\ &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\phi}\right)(\alpha) \\ &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\phi)\right)(\alpha) \\ &= \sqrt{2\pi}\phi(\alpha) \\ &= \sqrt{2\pi}\delta_{\alpha}(\phi)\end{aligned}$$

stąd wniosek:

$$\widehat{T}_f = \sqrt{2\pi}\delta_{\alpha}$$

Lista wzorów

Równanie Bessela

$$\begin{aligned}x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) &= 0 \\ J_\nu(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1 + \nu + n)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}, \quad Y_\nu(t) = \lim_{\xi \rightarrow \nu} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} (J_\xi(t) \cos(\pi \xi) - J_{-\xi}(t))}{\frac{\partial}{\partial \xi} (\sin(\pi \xi))} \\ \exp\left(\frac{t}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)\right) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(t) x^n, \quad x \neq 0 \\ \Gamma(x) &:= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt\end{aligned}$$

Szeregi Fouriera

Szereg Fouriera dla funkcji f na odcinku $[a, b]$:

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a}\right) \right) \\ A_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a}\right) dx \\ B_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a}\right) dx\end{aligned}$$

Transformacja Fouriera

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\omega) &= \hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ f(x) &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \\ \mathcal{F}(f(x) \cos(\sigma x))(\omega) &= \frac{1}{2} (\hat{f}(\omega + \sigma) + \hat{f}(\omega - \sigma)) \\ \mathcal{F}(f(x) \sin(\sigma x))(\omega) &= \frac{1}{2i} (\hat{f}(\omega + \sigma) - \hat{f}(\omega - \sigma)) \\ \mathcal{F}(f')(\omega) &= i\omega \mathcal{F}(f)(\omega) \\ (f * g)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy\end{aligned}$$