

Kolokwium 1 - poprawa 2.

04/02/2026

1. Sprawdź, że funkcja $x_1(t) \equiv 1$ jest rozwiązaniem poniższego równania różniczkowego:

$$x''(t) + \frac{x'(t)}{t} = 0$$

Znajdź rozwiązanie ogólne. Znajdź rozwiązanie spełniające warunki początkowe:

$$x(1) = 1, \quad x'(1) = 2$$

2. Rozwiąż jeden z poniższych podpunktów:

- (a) Rozwiąż poniższe równanie z wykorzystaniem odpowiedniego ansatzu:

$$x''(t) - 7x'(t) + 10x(t) = 0$$

- (b) Rozwiąż poniższe równanie z wykorzystaniem odpowiedniego ansatzu:

$$t^2 x''(t) + 5tx'(t) + 3x(t) = 0$$

3. Rozwiąż jeden z poniższych podpunktów:

- (a) Wykorzystaj metodę szeregów potęgowych do rozwiązania równania różniczkowego:

$$(1 - t^2)x''(t) + 4tx'(t) - 4x(t) = 0$$

Zapisz jawnie wynik końcowy.

- (b) Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) + 1 \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

Przykładowe rozwiązania

1. Skoro x_1 to funkcja stała, zatem:

$$x_1(t) = 1 \implies x_1'(t) = 0 \implies x_1''(t) = 0$$

a tym samym równanie jest spełnione:

$$0 + \frac{0}{t} = 0$$

Ze wzoru Abela otrzymujemy Wrońskian:

$$W(t) \propto \exp\left(-\int \frac{1}{t} dt\right) \propto \exp(-\ln(t)) = \frac{1}{t} \quad (1)$$

zaś drugie niezależne liniowo rozwiązanie dostaniemy:

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{W(t)}{x_1(t)} dt \propto \int \frac{1}{t} dt = \ln(t) + c$$

A zatem rozwiązanie ogólne:

$$x(t) = c_1 + c_2 \ln(t)$$

Podstawiając warunki początkowe:

$$1 = x(1) = c_1 + c_2 \ln(1) = c_1$$

$$2 = x'(1) = c_2 \cdot \frac{1}{t} \bigg|_{t=1} = c_2$$

stąd poszukiwane rozwiązanie:

$x(t) = 1 + 2 \ln(t)$

(2)

2. (a) Równanie ma stałe współczynniki, stąd posługujemy się metodą wielomianu charakterystycznego $\equiv$ podstawiamy ansatz $x(t) \propto e^{rt}$, $r \in \mathbb{C}$, otrzymując:

$$0 = r^2 - 7r + 10 = (r - 5)(r - 2)$$

a zatem, skoro równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, dostajemy rozwiązanie:

$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t}$

- (b) Równanie ma współczynniki o potęgach równych rzędowi pochodnych, stąd podstawiamy ansatz $x(t) \propto t^r$, $r \in \mathbb{C}$ otrzymując:

$$0 = r(r - 1) + 5r + 3 = r^2 + 4r + 3 = (r + 3)(r + 1)$$

a zatem rozwiązaniem jest:

$x(t) = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^3}$

3. (a) Ponieważ funkcje¹:

$$P(t) = \frac{4t}{1-t^2}, \quad Q(t) = -\frac{4}{1-t^2}$$

są analityczne w $t = 0$, zatem korzystając z twierdzenia o rozwiązaniu analitycznym podstawiamy:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

przy czym poszukując rozwiązania należy znaleźć relacje na a_n (jawne bądź, gdy jest to bardzo skomplikowane, wyłącznie rekurencyjne). Zatem:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1} \\ x''(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) t^{n-2} \end{aligned}$$

co po podstawieniu daje:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-t^2) \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) t^{n-2} + 4t \sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) t^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) t^n + 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &\quad \left| \begin{array}{l} k = n-2 \\ n = k+2 \\ n = 2 \implies k = 0 \end{array} \right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (k+2)(k+1) t^k - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) t^n + 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= 2a_2 + 6a_3 t + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) t^n + 4a_1 t \\ &\quad + 4 \sum_{n=2}^{\infty} a_n n t^n - 4a_0 - 4a_1 t - 4 \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n \end{aligned}$$

co, po segregowaniu wyrazów przy kolejnych potęgach daje:

$$\begin{aligned} 2a_2 - 4a_0 &= 0 \implies a_2 = 2a_0 \\ 6a_3 + 4a_1 - 4a_1 &= 0 \implies a_3 = 0 \\ a_{n+2} (n+2)(n+1) - a_n n(n-1) + 4a_n n - a_n &= 0 \\ \implies a_{n+2} &= a_n \frac{n(n-1) + 4 - 4n}{(n+1)(n+2)} = a_n \frac{n^2 - 5n + 4}{(n+2)(n+1)} \\ &= a_n \frac{(n-4)(n-1)}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

Z powyższego wzoru wynika, że:

☛ a_n o nieparzystych indeksach większych od jednośc są równe zero

¹Odwołując się do notacji z wykładu

- ☛ dla $n = 4$ otrzymamy $a_6 = a_{4+2} = 0$ ze względu na zanikający licznik
 - ☛ a w konsekwencji wszystkie parzyste indeksy większe od 4 zanikają
- a zatem obliczamy kolejne współczynniki:

$$\begin{aligned} a_0 & \\ a_1 & \\ a_2 &= 2a_0 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= a_{2+2} = a_2 \cdot \frac{(2-4)(2-1)}{(2+2)(2+1)} = 2a_0 \cdot \frac{-2}{12} = -\frac{a_0}{3} \end{aligned}$$

stąd ostateczny wynik:

$$x(t) = c_1 t + a_0 \left(1 + 2t^2 - \frac{1}{3}t^4 \right)$$

- (b) Korzystając z metody macierzowej zapisujemy układ równań jako:

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{F}(t)$$

Potrzebujemy policzyć:

$$\vec{x}(t) = e^{tA} \int e^{-tA} \vec{F}(t) dt$$

Możemy diagonalizować macierz A , lecz w tym przypadku łatwiej zauważyć, że jest ona niczym innym jak macierzową reprezentacją jednostki urojonej:

$$AA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbb{I}$$

a zatem:

$$e^{tA} = \cos(t)\mathbb{I} + \sin(t)A = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

Kolejną rzeczą, jaką zauważamy jest to, że wektor niejednorodności $\vec{F}(t)$ jest wektorem stałym, a tym samym możemy wyłączyć go poza całkę. Stąd:

$$\begin{aligned} \int e^{-tA} dt &= \int \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} \int \cos(t) dt & \int \sin(t) dt \\ -\int \sin(t) dt & \int \cos(t) dt \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin(t) + c_1 & -\cos(t) + c_2 \\ \cos(t) + c_3 & \sin(t) + c_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Podstawiając zatem wszystko do powyższego wzoru:

$$\begin{aligned}
 \vec{x}(t) &= \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(t) + c_1 & -\cos(t) + c_2 \\ \cos(t) + c_3 & \sin(t) + c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(t) + c_1 \\ \cos(t) + c_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(t) \sin(t) + \cos(t)c_1 - \sin(t) \cos(t) - \sin(t)c_3 \\ \sin(t)^2 + c_1 \sin(t) + \cos(t)^2 + c_3 \cos(t) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_1 \cos(t) - c_3 \sin(t) \\ c_1 \sin(t) + c_3 \cos(t) + 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

stąd wynik:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos(t) - c_3 \sin(t) \\ c_1 \sin(t) + c_3 \cos(t) + 1 \end{bmatrix}$$

Lista wzorów

$$W(f, g)(t) = \det \begin{bmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{bmatrix}$$

Dla równania różniczkowego:

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = h(t)$$

wzór Abela:

$$W(t) \propto \exp \left(- \int \frac{b(t)}{a(t)} dt \right)$$

$$f_2(t) = f_1(t) \int \frac{W(t)}{f_1(t)^2} dt$$

$$C_1'(t) = -\frac{h(t)W(t)}{a(t)f_2(t)}, \quad C_2'(t) = \frac{h(t)W(t)}{a(t)f_1(t)}$$

Dla układu równań:

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{F}(t)$$

rozwiązaniem jest:

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{c} + e^{tA} \int e^{-tA} \vec{F}(t) dt$$