Kolokwium 2, grupa 1

27/01/2026

Zadania:

1. Rozwiąż poniższe równanie różniczkowe:

$$x''(t) + \frac{3}{t}x'(t) + \left(j^2 + \frac{1}{t^2}\right)x(t) = 0$$

   Podpowiedź: zastosuj podstawienie $x(t) = y(t)/t$ oraz odpowiednią zamianę zmiennych

2. Niech $f_+ : \ (0, \infty) \to \mathbb{R}$:

$$f_+(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2}, & x \geqslant \frac{\pi}{2} \\ 0, & x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

   Znajdź nieparzyste rozszerzenie tej funkcji na cały zbiór $f : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a następnie oblicz rozwinięcie f w szereg Fouriera na przedziale $[-\pi, \pi]$

3. Rozwiąż jeden z poniższych punktów (a) lub (b):

   (a) Niech zadane będą funkcje:

$$f(x) = e^{-x}\Theta(x), \qquad g(x) = \Theta(x)\Theta(1-x)$$

   policz:

$$\mathcal{F}(f * g)$$

   (b) Dla $\sigma \in \mathbb{R}$, policz $\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\phi}(x)\cos(\sigma x)\right)$ a następnie policz transformację Fouriera dystrybucji regularnej zadanej przez $\phi(x) = x\cos(x)$

4. Dla funkcji lokalnie całkowalnych $f, g, j, \ h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ oraz $a \in \mathbb{R}$ policz pochodne dystrybucji regularnych zadawanych przez nie:

$$f(x) = \Theta_a(x) := \Theta(x-a), \qquad a \in \mathbb{R}$$
$$g(x) = h(x)\Theta_a(x)$$
$$j(x) = \begin{cases} 0, & x < -5 \\ 1, & x \in [-5, \pi) \\ 1 + \sin(x), & x \in [\pi, 4\pi) \\ 1 + \sin(x) + \cos(x), & x \geqslant 4\pi \end{cases}$$

Przykładowe rozwiązania grupy 1

1. Stosując podpowiedziane podstawienie otrzymujemy:

$$x(t) = \frac{y(t)}{t}$$
$$x'(t) = \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2}$$
$$x''(t) = \frac{y''(t)}{t} - 2\frac{y'(t)}{t^2} + 2\frac{y}{t^3}$$

a zatem podstawiając:

$$\begin{aligned}
0 &= x''(t) + \frac{3}{t}x'(t) + \left(j^2 + \frac{1}{t^2}\right) x(t) \\
&= \frac{y''(t)}{t} - 2\frac{y'(t)}{t^2} + 2\frac{y}{t^3} + \frac{3}{t}\left(\frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2}\right) + \left(j^2 + \frac{1}{t^2}\right)\frac{y(t)}{t} \\
&= \frac{y''(t)}{t} + \frac{y'(t)}{t^2} + j^2\frac{y(t)}{t} \\
&\text{obustronnie} \cdot t^3 \\
0 &= t^2 y''(t) + ty'(t) + (jt)^2 y(t)
\end{aligned}$$

Zauważamy, że ostatni człon ma inaczej przedstawioną zmienną, więc spróbujmy podstawienia ze zmienionym parametrem:

$$y(t) = z(jt) = z(\tau)$$
$$y'(t) = j\ z'(jt) = j\ z'(\tau)$$
$$y''(t) = j^2\ z''(jt) = j^2\ z''(\tau)$$

otrzymując równanie różniczkowe::

$$0 = t^2 j^2\ z''(jt) + tj\ z'(jt) + (jt)^2\ z(jt) = \tau^2 z''(\tau) + \tau z'(\tau) + (\tau^2 - 0^2) z(\tau)$$

W ostatniej postaci rozpoznajemy równanie Bessela z parametrem $\nu = 0$. Ponieważ jest to liczba całkowita, rozwiązaniami takiego równania są funkcje pierwszego i drugiego rodzaju. Zatem otrzymujemy rozwiązanie:

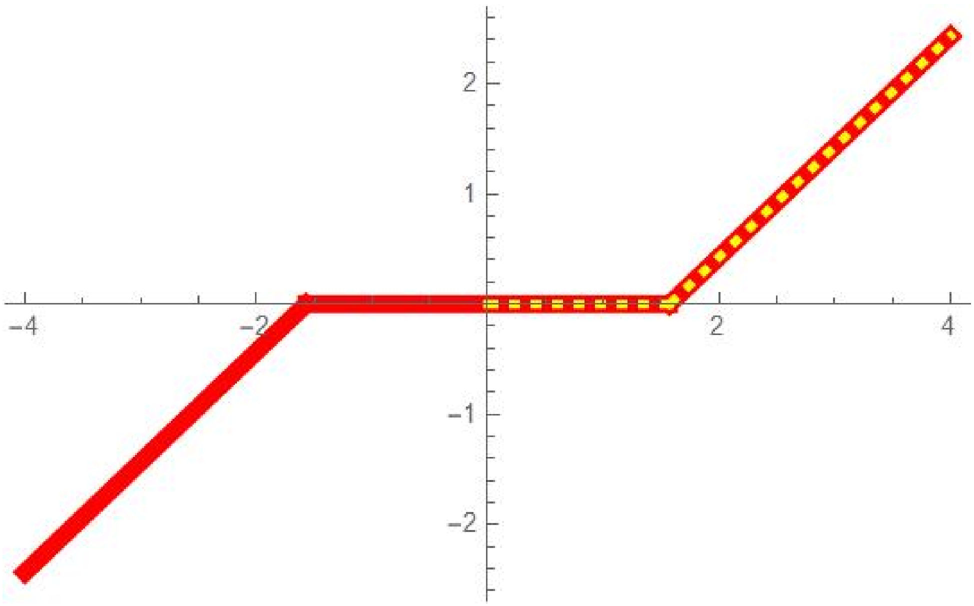
$$z(\tau) = c_1 J_0(\tau) + c_2 Y_0(\tau) = z(jt) = y(t) \implies \boxed{x(t) = \frac{c_1}{t} J_0(jt) + \frac{c_2}{t} Y_0(jt)}$$

2. Nieparzysta funkcja charakteryzuje się tym, że $f(-x) = -f(x)$, zatem można zauważyć, że oczekiwanym rozszerzeniem będzie:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & x \leqslant -\frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \geqslant \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Na grafice 1 znajduje się rysunek obu funkcji. Szereg Fouriera na odcinku $[-\pi, \pi]$ zadany jest jako:

$$f(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\right)$$



Rysunek 1: Na żółto (przerywane) - funkcja oryginalna f_+, na czerwono - jej nieparzyste rozszerzenie

ze współczynnikami:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \end{aligned}$$

Zauważamy, że nasza funkcja jest nieparzysta, zatem współczynniki A_n będą wszystkie równe zero - cosinus jest funkcją parzystą, funkcja parzysta razy nieparzysta daje nieparzystą, całka funkcji nieparzystej na przedziale symetrycznym wynosi zero. Obliczamy zatem współczynniki B_n:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} 0 \sin(nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin(nx) dx \end{aligned}$$

Całkując przez części:

$$\begin{aligned} \int \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin(nx) dx &= \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{-\cos(nx)}{n} - \int \frac{-\cos(nx)}{n} dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \end{aligned}$$

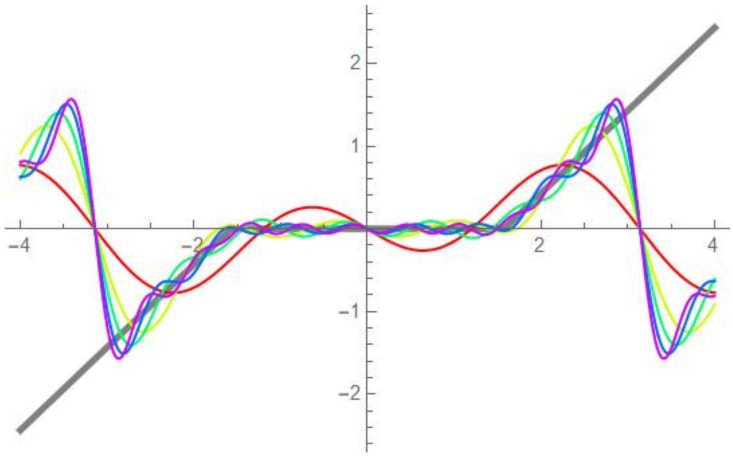
Podstawiając zatem:

$$
\begin{aligned}
B_n &= .... = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\cos(nx)}{n}\Bigg|_{x=\pi/2}^{x=\pi} + \frac{2}{\pi}\frac{\sin(nx)}{n^2}\Bigg|_{x=\pi/2}^{x=\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\cos(nx)}{n} - 0\right) + \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\right) \\
&= -\frac{(-1)^n}{n} - \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi} \\
&= -\frac{n\pi(-1)^n + 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi}
\end{aligned}
$$

Otrzymujemy zatem szereg:

$$
\boxed{f(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi(-1)^n + 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi} \cdot \sin(nx)}
$$

Na poniższej grafice znajduje się przybliżenie f z zastosowaniem wyliczonego powyżej szeregu.



Rysunek 2: Na szaro - funkcja, na czerwono - pierwsze 2 wyrazy szeregu, na żółto-zielono - pierwsze 4 wyrazy szeregu, na cyjanowo-seledynowo - pierwsze 6 wyrazów szeregu, na granatowo - pierwsze 8 wyrazów szeregu, na fioletowo - pierwsze 10 wyrazów szeregu.

3. (a) Zadanie można policzyć bezpośrednio, licząc najpierw splot, a potem transformację fourierowską (dłuższa metoda), albo korzystając z twierdzenia, które mówi że

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\ \widehat{g}$$

. Policzmy zatem oboma metodami:

i. zaczynając od bezpośredniego liczenia, musimy być bardzo uważni na granice całkowania - ponieważ zależą one od zmiennej zewnętrznej:

$$\begin{aligned} f * g(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y-x)g(x)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 f(y-x)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-(y-x)}\Theta(y-x)dx \\ &= \frac{e^{-y}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^x\Theta(y-x)dx \\ &= \frac{e^{-y}}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} y \leqslant 0: & 0 \\ y \in (0,1]: & \int_0^y e^x dx \\ y > 1: & \int_0^1 e^x dx \end{cases} \\ &= \frac{e^{-y}}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} y \leqslant 0: & 0 \\ y \in (0,1]: & e^y - 1 \\ y > 1: & e - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Albo, korzystając z symetrii zbadajmy najpierw granice całkowania:

$$\begin{aligned} \Theta(y-x) &= \begin{cases} 0 & y - x < 0 \\ 1 & y - x \geqslant 0 \iff y \geqslant x \end{cases} \\ \Theta(1-(y-x)) &= \begin{cases} 0 & 1 + x - y < 0 \\ 1 & 1 + x - y \geqslant 0 \iff x \geqslant y - 1 \end{cases} \\ \Theta(y-x)\Theta(1+x-y) &= \begin{cases} 1 & y \geqslant x \geqslant y - 1 \\ 0 & x < y - 1 \quad \vee \quad x > y \end{cases} \end{aligned}$$

Dostajemy zatem całkę:

$$\begin{aligned} f * g(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y-1}^{y} e^{-x}\Theta(x)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} y \leqslant 0: & x \leqslant y \leqslant 0 \implies \Theta(x) = 0 \implies \int_{y-1}^{y} e^{-x}\Theta(x)dx = 0 \\ y \in (0,1]: & y - 1 \leqslant 0 \implies \int_{y-1}^{y} e^x\Theta(x)dx = \int_0^y e^{-x}dx = 1 - e^{-y} \\ y > 1: & \int_{y-1}^{y} e^{-x}dx = e^{-(y-1)} - e^{-y} = e^{-y}(e-1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} y \leqslant 0: & 0 \\ y \in (0,1]: & \frac{1-e^{-y}}{\sqrt{2\pi}} \\ y > 1: & \frac{(e-1)e^{-y}}{\sqrt{2\pi}} \end{cases} \end{aligned}$$

Następnie przeprowadźmy transformację Fouriera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f*g)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f*g(y)e^{-i\omega y}dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 (1-e^{-y})e^{-i\omega y}dy + \frac{e-1}{2\pi}\int_1^{\infty} e^{-y}e^{-i\omega y}dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega y}\Big|_{y=0}^{y=1} - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-(1+i\omega)}e^{-(1+i\omega)y}\Big|_{y=0}^{y=1} \\
&\qquad + \frac{e-1}{2\pi}\frac{1}{-(1+i\omega)}e^{-(1+i\omega)y}\Big|_{y=1}^{y\to\infty} \\
&= \frac{1-e^{-i\omega}}{2i\omega\pi} + \frac{e^{-1}e^{-i\omega}-1}{2\pi(1+i\omega)} + \frac{e-1}{2\pi}\frac{e^{-1}e^{-i\omega}-0}{1+i\omega} \\
&= \frac{1-e^{-i\omega}}{2i\omega\pi} + \frac{e^{-1}e^{-i\omega}-1+e^{-i\omega}-e^{-1}e^{-i\omega}}{2\pi(1+i\omega)} \\
&= \frac{1-e^{-i\omega}}{2\pi\cdot i\omega\cdot(1+i\omega)}\Big(1+i\omega-i\omega\Big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left(f*g\right)\left(\omega\right) = \frac{e^{-i\omega}-1}{2\pi(\omega^2-i\omega)}}$$

ii. Korzystając zaś ze wzmiankowanego wcześniej twierdzenia, musimy policzyć najpierw dwie transformaty:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\Theta(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-(1+i\omega)x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-(1+i\omega)}e^{-(1+i\omega)x}\Big|_{y=0}^{y\to\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)\Theta(1-x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

A zatem:

$$\boxed{\mathcal{F}\left(f * g\right)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)} \cdot \frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-i\omega}-1}{2\pi(\omega^2 - i\omega)}}$$

(b) Transformację odwrotną liczymy bezpośrednio z definicji, korzystając również z przedstawienia cosinusa poprzez eksponenty: $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\phi}(x)\cos(\sigma x)\right)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(x)\cos(\sigma x) e^{i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(x)\frac{e^{i\sigma x}+e^{-i\sigma x}}{2} e^{i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(x) e^{i\sigma x} e^{i\omega x} dx + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(x) e^{-i\sigma x} e^{i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(x) e^{ix(\sigma+\omega)} dx + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(x) e^{ix(-\sigma+\omega)} dx \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\phi}\right)(\omega+\sigma) + \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\phi}\right)(\omega-\sigma)
\end{aligned}$$

a ponieważ $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathrm{id} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}$, $\widehat{\phi} = \mathcal{F}(\phi)$, powyższe równanie upraszcza się:

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\phi}(x)\cos(\sigma x)\right)(\omega) = \frac{1}{2}\Big(\phi(\omega+\sigma) + \phi(\omega-\sigma)\Big)}$$

Powyższy wzór wykorzystamy w dalszej części zadania. Przypomnijmy również, że dla funkcji $\varphi \in \mathcal{D}$ zachodzi:

$$\widehat{\varphi'}(\omega) = i\omega\widehat{\varphi}(\omega)$$

co pozwala nam obliczyć:

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_\phi(\varphi) &:= T_\phi(\widehat{\varphi}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\widehat{\varphi}(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x) x\widehat{\varphi}(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)\frac{1}{i}\widehat{\varphi'}(x) dx \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)\widehat{\varphi'}(x) e^{ix\cdot 0} dx \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{i}\mathcal{F}^{-1}\left(\cos\cdot\widehat{\varphi'}\right)(0) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \cdot \frac{1}{2}\Big(\varphi'(0+1) + \varphi'(0-1)\Big) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2i}\left(\varphi'(1) + \varphi'(-1)\right)
\end{aligned}$$

Tym samym otrzymujemy:

$$\boxed{\widehat{T}_{\phi}(\varphi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i}\left(\varphi'(1) + \varphi'(-1)\right)}$$

lub, wykorzystując wiedzę z ćwiczeń o pochodnej delty Diracka:

$$\delta'_a(\varphi) = -\delta_a(\varphi') = -\varphi'(a)$$

otrzymamy wyrażenie:

$$\boxed{\widehat{T}_{\phi} = \frac{i\sqrt{2\pi}}{2}\left(\delta'_1 + \delta'_{-1}\right)}$$

4. Pochodna dystrybucji T zdefiniowana jest jako:

$$T'(\phi) := -T(\phi')$$

zatem, podstawiając do wzoru:

$$\begin{aligned}
T'_f(\phi) &:= -T_f(\phi') \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x-a)\phi'(x)dx \\
&= -\int_{a}^{\infty} \phi'(x)dx \\
&= -\phi(x)\Big|_{x=a}^{x\to\infty} \\
&= -(0-\phi(a)) \\
&= \phi(a)
\end{aligned}$$

$$T'_{\Theta(x-a)} = \delta_a$$

$$\begin{aligned}
T'_g(\phi) &:= -T_g(\phi') \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\Theta_a(x)\phi'(x)dx \\
&= -\int_{a}^{\infty} h(x)\phi'(x)dx \\
&= -h(x)\phi(x)\Big|_{x=a}^{x\to\infty} + \int_a^{\infty} h'(x)\phi(x)dx \\
&= h(a)\phi(a) + \int_{-\infty}^{\infty} h'(x)\Theta(x-a)\phi(x)dx \\
&= \delta(h\phi) + T_{h'\cdot\Theta_a}(\phi)
\end{aligned}$$

zaś korzystając z definicji mnożenia dystrybucji przez funkcję, dla delty Diraca:

$$h \cdot \delta_a = h(a) \cdot \delta(a)$$

otrzymujemy:

$$T'_{h\Theta_a} = h \cdot \delta_a + T_{h'\Theta_a}$$

Oczywistym jest też, że możemy zacząć od obliczenia T'_g, a następnie postawić $h(x) \equiv 1$ aby obliczyć T'_f.

Do obliczenia pochodnej dystrybucyjnej dla j skorzystamy z tego, że dystrybucje regularne są liniowe względem zadającej je funkcji:

$$\forall \xi, \zeta \in L^1_{loc},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}:\ T_{\alpha\xi+\beta\zeta} = \alpha T_\xi + \beta T_\zeta$$

oraz że pochodna również jest liniowa:

$$(\alpha T_1 + \beta T_2)'(\phi) = -(\alpha T_1 + \beta T_2)(\phi') = -\alpha T_1(\phi') - \beta T_2(\phi') = \alpha T'_1(\phi) + \beta T'_2(\phi)$$

Spostrzegamy bowiem, że:

$$j(x) = \Theta_{-5}(x) + \sin(x)\Theta_\pi(x) + \cos(x)\Theta_{4\pi}(x)$$

stąd:

$$\begin{aligned}
T'_j &= \left(T_{\Theta_{-5}} + T_{\sin\cdot\ \Theta_\pi} + T_{\cos\cdot\ \Theta_{4\pi}}\right)' \\
&= T'_{\Theta_{-5}} + T'_{\sin\cdot\ \Theta_\pi} + T'_{\cos\cdot\ \Theta_{4\pi}} \\
&= \delta_{-5} + \sin(\pi)\delta_\pi + T_{\cos\cdot\ \Theta_\pi} + \cos(4\pi)\delta_{4\pi} - T_{\sin\cdot\ \Theta_{4\pi}}
\end{aligned}$$

Korzystając zaś z tego, że $\sin(\pi) = 0,\ \cos(4\pi) = 1$ otrzymujemy:

$$\boxed{T'_j = \delta_{-5} + T_{\cos\cdot\ \Theta_\pi} + \delta_{4\pi} - T_{\sin\cdot\ \Theta_{4\pi}}}$$

Kolokwium 2, grupa 2

27/01/2026

Zadania:

1. Rozwiąż poniższe równanie różniczkowe:

$$t^2 x''(t) + 2tx'(t) + \left(9t^2 + \frac{1}{4}\right) x(t) = 0$$

   Podpowiedź: zastosuj podstawienie $x(t) = y(t)/\sqrt{t}$ oraz odpowiednią zamianę zmiennych

2. Niech $f_+ : \ (0, \infty) \to \mathbb{R}$:

$$f_+(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

   Znajdź nieparzyste rozszerzenie tej funkcji na cały zbiór $f : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a następnie oblicz rozwinięcie f w szereg Fouriera na przedziale $[-\pi, \pi]$

3. Rozwiąż jeden z poniższych punktów (a) lub (b):

   (a) Niech zadane będą funkcje:

$$f(x) = e^{-|x|}, \qquad g(x) = \Theta(-x)\Theta(x+1)$$

   policz:

$$\mathcal{F}\left(f * g\right)$$

   (b) Oblicz $\mathcal{F}\left(\phi'\right)$ a następnie policz transformację Fouriera dystrybucji regularnej zadanej przez $\phi(x) = xe^{ix}$

4. Dla funkcji lokalnie całkowalnych $f, g, j, \ h \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}; \mathbb{R}\right)$ oraz $a \in \mathbb{R}$ policz pochodne dystrybucji regularnych zadawanych przez nie:

$$f(x) = \Theta_a(x) := \Theta(x-a), \qquad a \in \mathbb{R}$$
$$g(x) = h(x)\Theta_a(x)$$
$$j(x) = \begin{cases} 0, & x < -5 \\ 1, & x \in [-5, -2) \\ 1 + x, & x \in [-2, 4\pi) \\ 1 + x + \cos(x), & x \geqslant 4\pi \end{cases}$$

Przykładowe rozwiązania grupy 2

1. Stosując podpowiedziane podstawienie otrzymujemy:

$$x(t) = y(t)t^{-1/2}$$
$$x'(t) = y'(t)t^{-1/2} - \frac{1}{2}y(t)t^{-3/2}$$
$$x''(t) = y''(t)t^{-1/2} - y'(t)t^{-3/2} + \frac{3}{4}y(t)t^{-5/2}$$

a zatem podstawiając:

$$\begin{aligned}
0 &= t^2x''(t) + 2tx'(t) + \left(9t^2 + \frac{1}{4}\right)x(t) \\
&= t^2\left(y''(t)t^{-1/2} - y'(t)t^{-3/2} + \frac{3}{4}y(t)t^{-5/2}\right) \\
&\quad + 2t\left(y'(t)t^{-1/2} - \frac{1}{2}y(t)t^{-3/2}\right) + \left(9t^2 + \frac{1}{4}\right)y(t)t^{-1/2} \\
&= y''(t)t^{3/2} - y'(t)t^{1/2} + \frac{3}{4}y(t)t^{-1/2} + 2y'(t)t^{1/2} - y(t)t^{-1/2} + 9y(t)t^{3/2} + \frac{1}{4}y(t)t^{-1/2} \\
&= y''(t)t^{3/2} + y'(t)t^{1/2} + 9t^{3/2}y(t) \\
&\quad \text{obustronnie} \cdot t^{1/2} \\
0 &= t^2y''(t) + ty'(t) + 9t^2y(t)
\end{aligned}$$

Zauważamy, że ostatni człon ma inaczej przedstawioną zmienną, więc spróbujmy podstawienia ze zmienionym parametrem:

$$y(t) = z(3t) = z(\tau)$$
$$y'(t) = 3z'(3t) = 3z'(\tau)$$
$$y''(t) = 9z''(3t) = 9z''(\tau)$$

otrzymując równanie różniczkowe::

$$0 = 9t^2\ z''(3t) + 3t\ z'(3t) + (3t)^2\ z(3t) = \tau^2z''(\tau) + \tau z'(\tau) + (\tau^2 - 0^2)z(\tau)$$

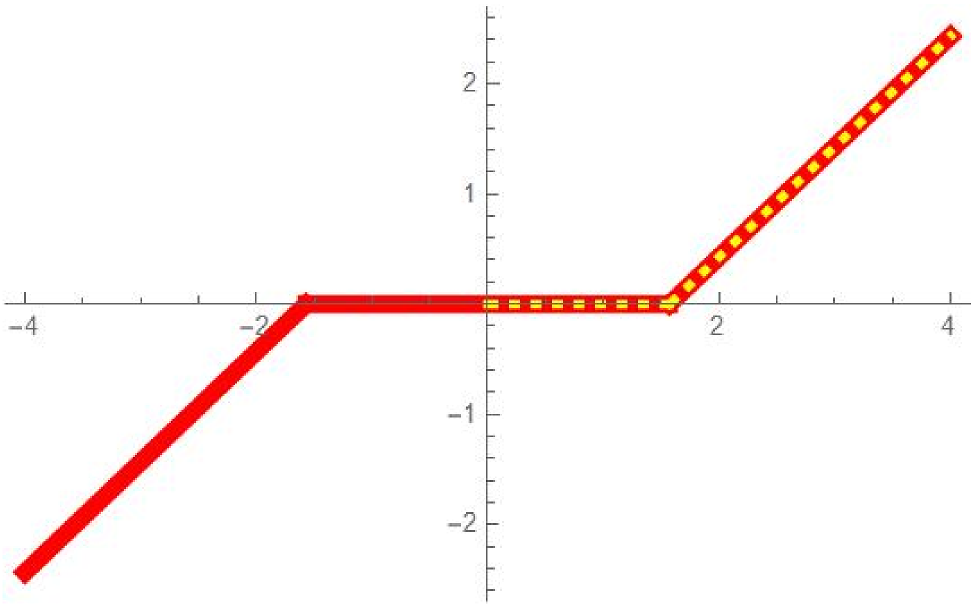
W ostatniej postaci rozpoznajemy równanie Bessela z parametrem $\nu = 0$. Ponieważ jest to liczba całkowita, rozwiązaniami takiego równania są funkcje pierwszego i drugiego rodzaju. Zatem otrzymujemy rozwiązanie:

$$z(\tau) = c_1J_0(\tau) + c_2Y_0(\tau) = z(3t) = y(t) \implies \boxed{x(t) = \frac{c_1}{\sqrt{t}}J_0(3t) + \frac{c_2}{\sqrt{t}}Y_0(3t)}$$

2. Nieparzysta funkcja charakteryzuje się tym, że $f(-x) = -f(x)$, zatem można zauważyć, że oczekiwanym rozszerzeniem będzie:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} - x, & -\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0 \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = 0 \end{cases}$$

Na grafice 3 znajduje się rysunek obu funkcji. Szereg Fouriera na odcinku $[-\pi, \pi]$



Rysunek 3: Na żółto (przerywane) - funkcja oryginalna f_+, na czerwono - jej nieparzyste rozszerzenie

zadany jest jako:

$$f(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$$

ze współczynnikami:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$
$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Zauważamy, że nasza funkcja jest nieparzysta, zatem współczynniki A_n będą wszystkie równe zero - cosinus jest funkcją parzystą, funkcja parzysta razy nieparzysta daje nieparzystą, całka funkcji nieparzystej na przedziale symetrycznym wynosi zero. Obliczamy zatem współczynniki B_n:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_{0}^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin(nx) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0 \cdot \sin(nx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi/2} \sin(nx) dx - \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} x \sin(nx) dx \end{aligned}$$

Kolejne całki to:

$$\begin{aligned} \int \sin(nx) dx &= -\frac{\cos(nx)}{n} + C \\ \int x \sin(nx) dx &= -\frac{x \cos(nx)}{n} - \frac{(-1)}{n} \int \cos(nx) dx \\ &= -\frac{x \cos(nx)}{n} + \frac{1}{n^2} \sin(nx) + C \end{aligned}$$

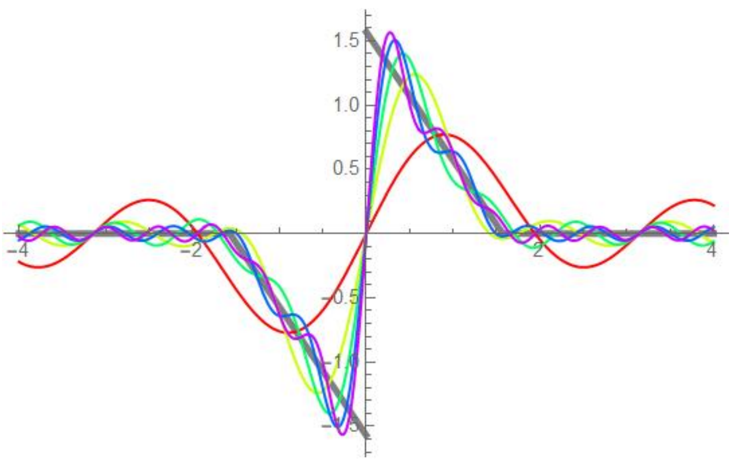
Podstawiając zatem:

$$
\begin{aligned}
B_n = ... &= -\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{x=0}^{x=\pi/2} - \frac{2}{\pi}\left.\frac{\sin(nx)}{n^2}\right|_{x=0}^{x=\pi/2} + \frac{2}{\pi}\left.\frac{x\cos(nx)}{n}\right|_{x=0}^{x=\pi/2} \\
&= -\frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right) - \frac{2}{\pi n^2}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right) + \frac{2}{n\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right) \\
&= -\frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n} - \frac{2}{\pi n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \frac{n\pi - 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}
\end{aligned}
$$

Otrzymujemy zatem szereg:

$$
\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi - 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} \cdot \sin(nx)}
$$

Na poniższej grafice znajduje się przybliżenie f z zastosowaniem wyliczonego powyżej szeregu.



Rysunek 4: Na szaro - funkcja, na czerwono - pierwsze 2 wyrazy szeregu, na żółto-zielono - pierwsze 4 wyrazy szeregu, na cyjanowo-seledynowo - pierwsze 6 wyrazów szeregu, na granatowo - pierwsze 8 wyrazów szeregu, na fioletowo - pierwsze 10 wyrazów szeregu.

3. (a) Zadanie można rozwiązać przez bezpośredni rachunek najpierw splotu, następnie zaś transformacji Fouriera, lub z wykorzystaniem twierdzenia o splocie. Obie metody zostały pokazane w grupie pierwszej, stąd tutaj posłużę się jedy-

nie drugą metodą, aby pokazać poprawny wynik.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\omega) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-i\omega x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\omega)} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+i\omega)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{x(1-i\omega)}}{1-i\omega} \right|_{x\to-\infty}^{x=0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-x(1+i\omega)}}{1+i\omega} \right|_{x=0}^{x\to\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1-0}{1-i\omega} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{0-1}{1+i\omega} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1+i\omega - (-1)(1-i\omega)}{1+\omega^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1+\omega^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(g)(\omega) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{0} e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left. \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right|_{x=-1}^{x=0} \\
&= \frac{i}{\omega\sqrt{2\pi}} \cdot \left(1 - e^{i\omega}\right)
\end{aligned}
$$

A zatem, korzystając z twierdzenia o splocie:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(f * g\right)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(g)(\omega) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1+\omega^2} \cdot \frac{i}{\omega\sqrt{2\pi}} \cdot \left(1 - e^{i\omega}\right) \\
&= \frac{i(1-e^{i\omega})}{\pi\omega(1+\omega^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\mathcal{F}\left(f * g\right)(\omega) = \frac{i(1-e^{i\omega})}{\pi\omega(1+\omega^2)}}
$$

(b) Transformację pochodnej liczymy bezpośrednio z definicji, korzystając z faktu że dla $\phi \in \mathcal{D}: \lim_{x\to\pm\infty} \phi(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\phi')(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \phi(x) e^{-i\omega x} \Big|_{x\to-\infty}^{x\to\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ e^{-i\omega x} \right\} dx \\
&= 0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)(-i\omega) e^{-i\omega x} dx \\
&= i\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= i\omega \mathcal{F}(\phi)(\omega)
\end{aligned}$$

otrzymujemy wynik znany już z wykładu:

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\phi'\right)(\omega) = i\omega \mathcal{F}(\phi)(\omega)}$$

Powyższy wzór wykorzystamy w dalszej części zadania. Przypomnijmy również, że dla funkcji $\varphi \in \mathcal{D}$ zachodzi:

$$\widehat{\varphi'}(\omega) = i\omega \widehat{\varphi}(\omega)$$

co pozwala nam obliczyć:

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_\phi\left(\varphi\right) := T_\phi\left(\widehat{\varphi}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \widehat{\varphi}(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{ix} \widehat{\varphi}(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{1}{i} \widehat{\varphi'}(x) dx \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cdot 1} \widehat{\varphi'}(x) dx \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\varphi'}\right)(1)
\end{aligned}$$

a ponieważ $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathrm{id} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}$, $\widehat{\phi} = \mathcal{F}(\phi)$, powyższe równanie upraszcza się:

$$\boxed{\widehat{T}_\phi(\varphi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \varphi'(1)}$$

lub, wykorzystując wiedzę z ćwiczeń o pochodnej delty Diracka:

$$\delta_a'(\varphi) = -\delta_a(\varphi') = -\varphi'(a)$$

otrzymamy wyrażenie:

$$\boxed{\widehat{T}_\phi = i\sqrt{2\pi}\delta_1'}$$

4. Rozwiązania dla f, g są jak w grupie 1. Dla j korzystamy również ze wspomnianych tam liniowości, oraz zauważamy:

$$j(x) = \Theta_{-5}(x) + x\Theta_{-2}(x) + \cos(x)\Theta_{4\pi}(x)$$

dla łatwiejszych oznaczeń wprowadźmy funkcję identycznościową $\mathrm{id}(x) = x$, wówczas:

$$\begin{aligned} T'_j &= \left(T_{\Theta_{-5}} + T_{\mathrm{id}\cdot\ \Theta_{-2}} + T_{\cos\cdot\ \Theta_{4\pi}}\right)' \\ &= T'_{\Theta_{-5}} + T'_{\mathrm{id}\cdot\ \Theta_{-2}} + T'_{\cos\cdot\ \Theta_{4\pi}} \\ &= \delta_{-5} - 2\delta_{-2} + T_{\Theta_{-2}} + \cos(4\pi)\delta_{4\pi} - T_{\sin\cdot\ \Theta_{4\pi}} \end{aligned}$$

Korzystając zaś z tego, że $\cos(4\pi) = 1$ otrzymujemy:

$$\boxed{T'_j = \delta_{-5} - 2\delta_{-2} + T_{\Theta_{-2}} + \delta_{4\pi} - T_{\sin\cdot\ \Theta_{4\pi}}}$$

Kolokwium 2, grupa 3

27/01/2026

Zadania:

1. Rozwiąż poniższe równanie różniczkowe:

$$tx''(t) + x'(t) + \frac{x(t)}{4} = 0$$

   Podpowiedź: zastosuj podstawienie $t = s^2$

2. Niech $f_+ : (0, \infty) \to \mathbb{R}$:

$$f_+(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2}, & x \geqslant \frac{\pi}{2} \\ 0, & x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

   Znajdź parzyste rozszerzenie tej funkcji na cały zbiór $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a następnie oblicz rozwinięcie f w szereg Fouriera na przedziale $[-\pi, \pi]$

3. Rozwiąż jeden z poniższych punktów (a) lub (b):

   (a) Niech zadane będą funkcje:

$$f(x) = e^{-|x|}, \qquad g(x) = \Theta(1-x)\Theta(x+1)$$

   policz:

$$\mathcal{F}\left(f * g\right)$$

   (b) Dla $\sigma \in \mathbb{R}$, policz $\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\phi}(x)\sin(\sigma x)\right)$ a następnie policz transformację Fouriera dystrybucji regularnej zadanej przez $\phi(x) = x\sin(x)$

4. Dla funkcji lokalnie całkowalnych $f, g, j, h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ oraz $a \in \mathbb{R}$ policz pochodne dystrybucji regularnych zadawanych przez nie:

$$f(x) = \Theta_a(x) := \Theta(x-a), \qquad a \in \mathbb{R}$$
$$g(x) = h(x)\Theta_a(x)$$
$$j(x) = \begin{cases} 0, & x < -5 \\ 1, & x \in [-5, -2) \\ 1 + x, & x \in [-2, 4\pi) \\ 1 + x + \exp(x), & x \geqslant 4\pi \end{cases}$$

Przykładowe rozwiązania grupy 3

1. Niech $t = s^2$, $x(s^2) = y(s)$, wówczas:

$$y'(s) = \frac{d}{ds}y(s) = \frac{d}{ds}x(s^2) = x'(s^2)\cdot 2s \implies x'(t) = x'(s^2) = \frac{y'(s)}{2s}$$
$$y''(s) = \frac{d^2}{ds^2}y(s) = \frac{d}{ds}\left(2sx'(s^2)\right) = 2x'(s^2) + 2s\cdot 2s\cdot x''(s^2) = \frac{y'(s)}{s} + 4tx''(t)$$
$$\implies tx''(t) = \frac{1}{4}y''(s) - \frac{1}{4s}y'(s)$$

co, po podstawieniu do oryginalnego równania różniczkowego, daje:

$$\begin{aligned} 0 &= tx''(t) + x'(t) + \frac{x(t)}{4} \\ &= \frac{1}{4}y''(s) - \frac{1}{4s}y'(s) + \frac{y'(s)}{2s} + \frac{y(s)}{4} \\ &\quad \text{obustronnie} \cdot 4s^2 \\ 0 &= s^2y''(s) - sy'(s) + 2sy'(s) + s^2y(s) \\ &= s^2y''(s) + sy'(s) + (s^2 - 0^2)y(s) \end{aligned}$$

w czym rozpoznajemy równanie Bessela z parametrem $\nu = 0$, zatem otrzymujemy rozwiązanie na $y(s)$:

$$y(s) = c_1J_0(s) + c_2Y_0(s)$$

zatem, wracając do $x(t) = y(\sqrt{t})$ otrzymujemy ostatecznie:

$$\boxed{x(t) = c_1J_0(\sqrt{t}) + c_2Y_0(\sqrt{t})}$$

2. Parzysta funkcja charakteryzuje się tym, że $f(-x) = f(x)$, zatem można zauważyć, że oczekiwanym rozszerzeniem będzie:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} - x, & x < -\frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2}, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

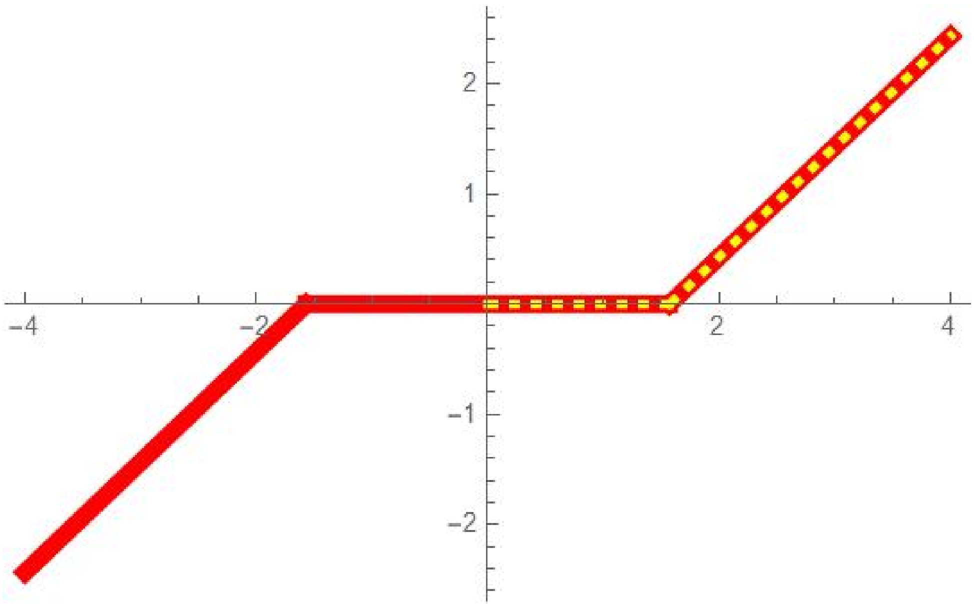
Na grafice 5 znajduje się rysunek obu funkcji. Szereg Fouriera na odcinku $[-\pi, \pi]$ zadany jest jako:

$$f(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(nx) + B_n\sin(nx)\right)$$

ze współczynnikami:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$
$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Zauważamy, że nasza funkcja jest parzysta, zatem współczynniki B_n będą wszystkie równe zero - sinus jest funkcją nieparzystą, funkcja parzysta razy nieparzysta daje



Rysunek 5: Na żółto (przerywane) - funkcja oryginalna f_+, na czerwono - jej parzyste rozszerzenie

nieparzystą, całka funkcji nieparzystej na przedziale symetrycznym wynosi zero. Obliczamy zatem współczynniki A_n:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 0\cdot\cos(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(nx)dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} x\cos(nx)dx - \frac{\pi}{2}\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nx)dx \end{aligned}$$

Kolejne całki to, przy założeniu że $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int \cos(nx)dx &= \frac{\sin(nx)}{n} + C \\ \int x\cos(nx)dx &= \frac{x\sin(nx)}{n} - \frac{1}{n}\int \sin(nx)dx \\ &= \frac{x\sin(nx)}{n} + \frac{1}{n^2}\cos(nx) + C \end{aligned}$$

Podstawiając zatem:

$$\begin{aligned}
A_n = ... &= \frac{2}{\pi} \cdot \left. \frac{x \sin(nx)}{n} \right|_{x=\pi/2}^{x=\pi} + \frac{2}{\pi} \left. \frac{1}{n^2} \cos(nx) \right|_{x=\pi/2}^{x=\pi} - \left. \frac{\sin(nx)}{n} \right|_{x=\pi/2}^{x=\pi} \\
&= \frac{2}{n\pi} \left(\pi \sin(n\pi) - \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) + \frac{2}{n^2\pi} \left(\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \\
&\qquad - \frac{1}{n} \left(\sin(n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \\
&= -\frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2(-1)^n - 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi} + \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \frac{2}{n^2\pi} \left((-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)
\end{aligned}$$

Ponieważ w powyższych obliczeniach musieliśmy wykluczyć $n = 0$, zatem przeprowadzamy obliczenia osobno:

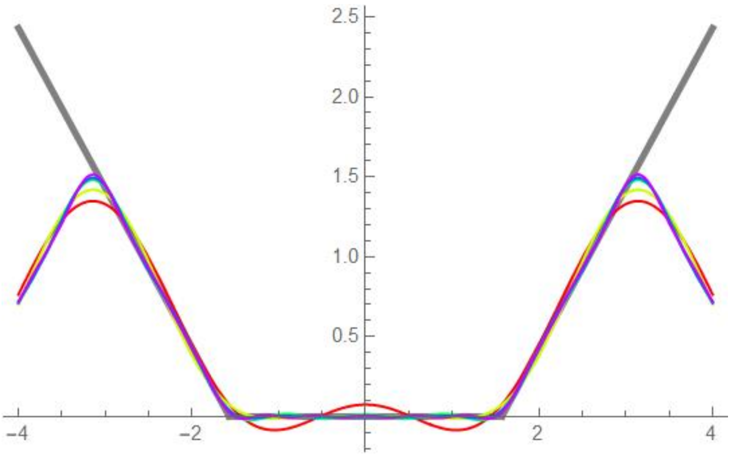
$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(0x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} 0 dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \left. \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right|_{x=\pi/2}^{x=\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem szereg:

$$\boxed{f(x) \sim \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left((-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \cdot \cos(nx)}$$

Na poniższej grafice znajduje się przybliżenie f z zastosowaniem wyliczonego powyżej szeregu.

3. (a) Zadanie można rozwiązać przez bezpośredni rachunek najpierw splotu, następnie zaś transformacji Fouriera, lub z wykorzystaniem twierdzenia o splocie. Obie metody zostały pokazane w grupie pierwszej, stąd tutaj posłużę się jedy-



Rysunek 6: Na szaro - funkcja, na czerwono - pierwsze 3 wyrazy szeregu, na żółto-zielono - pierwsze 5 wyrazy szeregu, na cyjanowo-seledynowo - pierwsze 7 wyrazów szeregu, na granatowo - pierwsze 9 wyrazów szeregu, na fioletowo - pierwsze 11 wyrazów szeregu.

nie drugą metodą, aby pokazać poprawny wynik.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\omega) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-i\omega x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\omega)} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+i\omega)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{x(1-i\omega)}}{1-i\omega} \right|_{x\to-\infty}^{x=0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-x(1+i\omega)}}{1+i\omega} \right|_{x=0}^{x\to\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1-0}{1-i\omega} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{0-1}{1+i\omega} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1+i\omega-(-1)\,(1-i\omega)}{1+\omega^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1+\omega^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(g)(\omega) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right|_{x=-1}^{x=1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{\omega} \cdot \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} \\
&= \frac{2\sin(\omega)}{\omega\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}
$$

A zatem, korzystając z twierdzenia o splocie:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(\omega) &= \mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(g)(\omega) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1+\omega^2} \cdot \frac{2\sin(\omega)}{\omega\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{2\sin(\omega)}{\pi\omega(1+\omega^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \frac{i(1 - e^{i\omega})}{\pi\omega(1+\omega^2)}}
$$

(b) Transformację odwrotną liczymy bezpośrednio z definicji, korzystając również z przedstawienia sinusa poprzez eksponenty: $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} i e^{-ix})$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\phi}(x)\sin(\sigma x)\right)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(x) \sin(\sigma x) e^{i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(x) \frac{e^{i\sigma x} - e^{-i\sigma x}}{2i} e^{i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(x) e^{i\sigma x} e^{i\omega x} dx - \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(x) e^{-i\sigma x} e^{i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(x) e^{ix(\sigma+\omega)} dx - \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(x) e^{ix(-\sigma+\omega)} dx \\
&= \frac{1}{2i} \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\phi}\right)(\omega+\sigma) - \frac{1}{2i} \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\phi}\right)(\omega-\sigma)
\end{aligned}
$$

a ponieważ $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathrm{id} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}$, $\widehat{\phi} = \mathcal{F}(\phi)$, powyższe równanie upraszcza się:

$$
\boxed{\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\phi}(x)\sin(\sigma x)\right)(\omega) = \frac{1}{2i}\Big(\phi(\omega+\sigma) - \phi(\omega-\sigma)\Big)}
$$

Powyższy wzór wykorzystamy w dalszej części zadania. Przypomnijmy również, że dla funkcji $\varphi \in \mathcal{D}$ zachodzi:

$$
\widehat{\varphi'}(\omega) = i\omega\widehat{\varphi}(\omega)
$$

co pozwala nam obliczyć:

$$\begin{aligned}
\widehat{T_\phi}(\varphi) &:= T_\phi(\widehat{\varphi}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\widehat{\varphi}(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) x\widehat{\varphi}(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\frac{1}{i}\widehat{\varphi'}(x)dx \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{i}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\widehat{\varphi'}(x)e^{ix\cdot 0}dx \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{i}\mathcal{F}^{-1}\left(\sin\cdot\widehat{\varphi'}\right)(0) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{i}\cdot\frac{1}{2i}\Big(\varphi'(0+1)-\varphi'(0-1)\Big) \\
&= -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(\varphi'(1)-\varphi'(-1)\right)
\end{aligned}$$

Tym samym otrzymujemy:

$$\boxed{\widehat{T_\phi}(\varphi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(\varphi'(-1)-\varphi'(1)\right)}$$

lub, wykorzystując wiedzę z ćwiczeń o pochodnej delty Diracka:

$$\delta_a'(\varphi) = -\delta_a(\varphi') = -\varphi'(a)$$

otrzymamy wyrażenie:

$$\boxed{\widehat{T_\phi} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(\delta_1' - \delta_{-1}'\right)}$$

4. Rozwiązania dla f, g są jak w grupie 1. Dla j korzystamy również ze wspomnianych tam liniowości, oraz zauważamy:

$$j(x) = \Theta_{-5}(x) + x\Theta_{-2}(x) + \cos(x)\Theta_{4\pi}(x)$$

dla łatwiejszych oznaczeń wprowadźmy funkcję identycznościową $\mathrm{id}(x) = x$, wówczas:

$$\begin{aligned}
T_j' &= \left(T_{\Theta_{-5}} + T_{\mathrm{id}\cdot\,\Theta_{-2}} + T_{\cos\cdot\,\Theta_{4\pi}}\right)' \\
&= T'_{\Theta_{-5}} + T'_{\mathrm{id}\cdot\,\Theta_{-2}} + T'_{\cos\cdot\,\Theta_{4\pi}} \\
&= \delta_{-5} - 2\delta_{-2} + T_{\Theta_{-2}} + \cos(4\pi)\delta_{4\pi} - T_{\sin\cdot\,\Theta_{4\pi}}
\end{aligned}$$

Korzystając zaś z tego, że $\cos(4\pi) = 1$ otrzymujemy:

$$\boxed{T_j' = \delta_{-5} - 2\delta_{-2} + T_{\Theta_{-2}} + \delta_{4\pi} - T_{\sin\cdot\,\Theta_{4\pi}}}$$

Lista wzorów

Równanie Bessela

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$$

$$J_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}, \qquad Y_\nu(t) = \lim_{\xi\to\nu} \frac{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(J_\xi(t)\cos(\pi\xi) - J_{-\xi}(t)\right)}{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sin(\pi\xi)\right)}$$

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

Szeregi Fouriera

Szereg Fouriera dla funkcji f na odcinku $[a,b]$:

$$f(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a}\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a}\right)\right)$$

$$A_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a}\right)dx$$
$$B_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a}\right)dx$$

Transformacja Fouriera

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$
$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}\right)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

$$\mathcal{F}(f(x)\cos(\sigma x))(\omega) = \frac{1}{2}\left(\widehat{f}(\omega+\sigma) + \widehat{f}(\omega-\sigma)\right)$$
$$\mathcal{F}(f(x)\sin(\sigma x))(\omega) = \frac{1}{2i}\left(\widehat{f}(\omega+\sigma) - \widehat{f}(\omega-\sigma)\right)$$

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega)$$

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

Miejsce na rysunki/szkice

Brudnopis