08/01/2026

1 Transformata Fouriera

Transformacją Fouriera $\mathcal{F}$ nazywamy odwzorowanie zadane jako:

$$f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$$

Zauważmy, że odwzorowuje ono jedną funkcję, f, w inną. W powyższym wzorze argumentem wyniku jest p. Wynik transformacji Fouriera nazywa się transformatą. W większości fizycznych przypadków, transformata sama w sobie jest na tyle dobrą funkcją, że można policzyć dla niej tzw. transformację odwrotną i uzyskać:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipx} dp$$

I tutaj pewna uwaga - w zależności od preferencji, potrzeb itd., stosuje się różne konwencje. W naszym przypadku wybraliśmy symetrycznątransformację/transformację odwrotną, obie całki są dzielone przez $\sqrt{2\pi}$. Czasmi jednak ten czynnik jest przeniesiony tylko na jedną stronę (pozostając wtedy bez pierwiastka), lub włączony w eksponentę.

Transformację Fouriera stosuje się w inżynierii i naukach ścisłych. Podstawowym zastosowaniem jest to, że pozwala ona przejść z dziedziny czasu na rozkład częstotliwości. Oznacza to, że badajac określone sygnały (dźwięki, światło itd.) możemy sprawdzić, jak duży udział w całej funkcji mają poszczególne częstotliwości.

W przypadku funkcji położenia, odpowiednikiem częstotliwości jest liczba falowa - zaś ponieważ mechanika kwantowa nadaje jej sens pędu (z dokładnością do stałej), zatem tranformacja Fouriera umożliwia przejście pomiezy reprezentacją położeniową a pędową.

2 Transformata Fouriera dystrybucji regularnej

Niech f będzie takąfunkcją, że jej transformata Fouriera oraz transformata odwrotna istnieją:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}\right)(x), \qquad \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\left(f\right)(\omega)$$

Dla (odwrotnej) transformaty Fouriera prawdziwa jest relacja:

$$\mathcal{F}\left(f(x)\cos\left(\sigma x\right)\right)(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega+\sigma) + \hat{f}(\omega-\sigma)}{2}$$
$$\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\omega)\cos\left(\sigma\omega\right)\right)(x) = \frac{f(x+\sigma) + f(x-\sigma)}{2}$$

czego dowodzimy bezpośrednim rachunkiem na przykład:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\omega)\cos(\sigma\omega)\right)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\omega)\cos(\sigma\omega)e^{i\omega x}d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\omega)\frac{e^{i\sigma\omega}+e^{-i\sigma\omega}}{2}e^{i\omega x}d\omega \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x+i\sigma\omega}d\omega + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x-i\sigma\omega}d\omega \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\omega)e^{i\omega(x+\sigma)}d\omega + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\omega)e^{i\omega(x-\sigma)}d\omega \\
&= \frac{1}{2}f(x+\sigma)+\frac{1}{2}f(x-\sigma)
\end{aligned}$$

Z drugiej strony, całka:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}e^{i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(\omega+1)}dx$$

nie jest określona dla dowolnego ω. Stąd wniosek, że transformata Fouriera funkcji sinus i cosinus nie istnieje.

Wiemy już jednak, że o ile granice pewnych ciągów funkcyjnych nie zbiegają do żadnej funkcji, dystrybucje regularne zadane przez te funkcje mogą zbiegać do innej dystrybucji. Mówimy wtedy o słabej zbieżności - i jak widzimy, jest ona pewnym rozszerzeniem zbieżności funkcji. Podobnie, udało się zdefiniować pochodną dystrybucji, rozszerzając pochodną funkcyjną. Nie powinno zatem dziwić, że możemy również rozszerzać inne własności, takie jak przekształcenie Fouriera. Definiujemy zatem

$$\hat{T}(f) := T\left(\hat{f}\right)$$

zaś dla funkcji, mówimy o transformacji fourierowskiej w sensie dystrybucyjnym, mając na myśli transformatę Fouriera dystrybucji regularnej zadanej przez tę funkcję. I takie operacje będziemy wykonywać.

Jeśli zatem:

$$f(x) = \cos(\sigma x), \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{\cos(\sigma x)}(f(x)) &:= T_{\cos(\sigma x)}\left(\hat{f}(x)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(x)\cos(\sigma x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(x)\cos(\sigma x)e^{ix\cdot 0}dx \\
&= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(x)\cos(\sigma x)\right)(0) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(f(0+\sigma)+f(0-\sigma)\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta_\sigma(f)+\delta_{-\sigma}(f)\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta_\sigma+\delta_{-\sigma}\right)(f) \\
&\implies \hat{T}_{\cos(\sigma\cdot)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta_\sigma+\delta_{-\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Analogicznie dla funkcji sinus:

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{\sin(\sigma x)}(f(x)) &:= T_{\sin(\sigma x)}\left(\hat{f}(x)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\sin(\sigma x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\sin(\sigma x)e^{ix\cdot 0}dx \\
&= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(x)\sin(\sigma x)\right)(0) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2i}\left(f(0+\sigma) - f(0-\sigma)\right) \\
&= -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta_\sigma(f) - \delta_{-\sigma}(f)\right) \\
&= -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta_\sigma - \delta_{-\sigma}\right)(f) \\
&\implies \hat{T}_{\sin(\sigma\cdot)} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta_\sigma - \delta_{-\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Łącząc te dwa wyniki, otrzymamy również:

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{e^{i\sigma x}} &= \hat{T}_{\cos(\sigma x)+i\sin(\sigma x)} \\
&= \hat{T}_{\cos(\sigma x)} + i\hat{T}_{\sin(\sigma x)} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta_\sigma + \delta_{-\sigma}\right) - i^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta_\sigma - \delta_{-\sigma}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot 2\delta_\sigma \\
&= \sqrt{2\pi}\ \delta_\sigma
\end{aligned}$$

3 Intuicja

Wróćmy na chwilę do szeregów Fouriera. Dla "wystarczająco dobrych funkcji", szereg Fouriera zbiega do oryginalnej funkcji (prawie wszędzie). Oznacza to, że funkcję możemy przedstawić jako (nieskończoną) sumę fal (sinusów i cosinusów), choć ograniczoną do pewnego odcinka. Przekształcenie Fouriera zachowuje ten sam tok rozumowania, lecz idzie o krok dalej. Pokazuje ona, że "odpowiednio dobre funkcje" można rozłożyć w ten sposób na całej dziedzinie. Płacimy za to jednak cenę - zmuszeni jesteśmy sumować po nieprzeliczalnym zbioże fal, i to jest właśnie całka w transformacji odwrotnej. Dodatkowym aspektem jest to, że wychodzimy poza funkcje rzeczywiste.

O rozkładzie funkcji na harmonijki zespolone $e^{i\sigma x}$ dobrze świadczy dystrybucyjna transformata Fouriera właśnie tej funkcji - otrzymujemy peak jednej częstotliwości= σ. Funkcje trygonometryczne sinus i cosinus są również doskonałym przykładem - one jawnie są sumą dwóch takich harmonijek, i ich dystrybucyjna transformata Fouriera pokazuje to.

Oczywiście, jeśli chodzi o wizualne, graficzne i koncepcyjne tłumaczenie mogę odwołać Państwa dofilmiku `https://youtu.be/spUNpyF58BY?si=slv6GAkAv62qVXN0`, na którym Grant Sanderson pokazuje to w bardzo przejrzysty sposób.

4 Literatura

Jeśli chodzi o literaturę związaną z teorią fourierowską i dystrybucjami, polecić mogę:

- Reed, Simon *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness* - z pewnymi zastosowaniami i odwołaniem się do fizyki kwantowej
- Walter Rudin *Functional Analysis* - choć jeszcze nie miałem przyjemności sam sięgnąć po tę literaturę, była mi ona bardzo polecana, podobno autor preferuje ścisłe, matematyczne podejście.