Poprawa kolokwium 1, grupa 1

15/12/2025

1. Rozwiąż poniższe zagadnienia różniczkowe:

   ☛ *(2 pkt)* Rozwiąż poniższe równanie:

   $$tx'(t) + 2x(t) - t^3 = 0$$

   ☛ *(3 pkt)* Rozwiąż zagadnienie Cauchy'ego poprzez podstawwienie odpowiedniego ansatzu:

   $$x''(t) - 20x'(t) + 100x(t) = 0, \qquad x(0) = 0, \quad x'(1) = 1$$

2. Podaj rozwiązanie ogólne układu:

   $$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

3. Rozwiąż poniższe równanie różniczkowe korzystając z podstawienia szeregu.

   $$x''(t) - 2tx'(t) + 8x(t) = 0, \qquad x'(0) = 0$$

   Znajdź rozwiązanie, które jest wielomianem, zapisz je jawnie.

Przykładowe rozwiązania grupy 1

1. ☛ Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne:

$$tx' = -2x$$

które, po rozdzieleniu zmiennych przekształcimy do postaci:

$$\frac{x'}{x} = -\frac{2}{t}$$

Następnie, całkując obustronnie:

$$\ln(x(t)) = \int \frac{x'(t)}{x(t)}dt = -2\int \frac{dt}{t} = -2\ln(t) + \tilde{C} = \ln\left(\frac{C}{t^2}\right)$$

a dzięki jednoznaczności logarytmu jako funkcji różnowartościowej:

$$x(t) = \frac{C}{t^2}$$

Aby rozwiązać równanie niejednorodne, podstawiamy rozwiązanie $x(t) = C(t)/t^2$ otrzymując:

$$\begin{aligned}
0 &= t\cdot\left(\frac{C(t)}{t^2}\right)' + 2\frac{C(t)}{t^2} - t^3 \\
&= \frac{tC'(t)}{t^2} - 2t\frac{C(t)}{t^3} + 2\frac{C(t)}{t^2} - t^3 \\
&= \frac{C'(t)}{t} - t^3 \\
&\implies C'(t) = t^4 \implies C(t) = \frac{1}{5}t^5 + c
\end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniem jest:

$$\boxed{x(t) = \frac{C(t)}{t^2} = \frac{\frac{1}{5}t^5 + c}{t^2} = \frac{1}{5}t^3 + \frac{c}{t^2}}$$

☛ Podstawiamy ansatz $x(t) \propto e^{rt}$, otrzymując wielomian charakterystyczny:

$$r^2 - 20r + 100 = 0 \implies r_\pm = \frac{-(-20) \pm \sqrt{20^2 - 4\cdot 100}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{400-400}}{2} = 10$$

zatem otrzymujemy jedno rozwiązanie:

$$x_1(t) = e^{10t}$$

Drugiego, niezależnego liniowo rozwiązania poszukamy korzystając z Wrońskianu. Z wzoru Abela:

$$W(t) = c\exp\left(-\int \frac{-20}{1}dt\right) = \tilde{c}\exp(20t)$$

zaś drugie rozwiązanie:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(t) \int \frac{W(t)}{x_1(t)^2} dt \\ &= e^{10t} \int \frac{e^{20t}}{(e^{10t})^2} dt \\ &= e^{10t} \int e^{20t} e^{-20t} dt \\ &= e^{10t} \int dt \\ &= te^{10t} + \bar{c} e^{10t} \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem rozwiązanie ogólne:

$$x(t) = c_1 e^{10t} + c_2 t e^{10t}$$

Podstawiając warunki:

$$0 = x(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 = c_1$$

$$\begin{aligned} 1 &= x'(1) \\ &= c_2 \frac{d}{dt} \left(t e^{10t} \right) \Big|_{t=1} \\ &= c_2 \left(e^{10t} + 10 t e^{10t} \right) \Big|_{t=1} \\ &= c_2 \left(e^{10} + 10 e^{10} \right) \\ &\implies c_2 = \frac{1}{11} e^{-10} \end{aligned}$$

A zatem pełne rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{11} t e^{10t-10}}$$

2. We wzorze z wykładu identyfikujemy:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Możemy zauważyć, że:

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I} \implies \begin{cases} A^{2n} = \mathbb{I} \\ A^{2n+1} = A \end{cases}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} A + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \mathbb{I} \\ &= \sinh(t) A + \cosh(t) \mathbb{I} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

przy czym rozpoznaliśmy w tym wyprowadzeniu szeregi Maclaurina dla funkcji hiperbolicznych, co uprościło nam obliczenia. Jeśli jednak nie pamiętamy tych szeregów i nie zauważymy powtarzalności potęg A, wystarczy zastosować metodę z diagonalizacją. Przypominam ją w rozwiązaniu w drugiej grupie (którą też można rozwiązać zauważając powyższe).

Mając powyższy wzór, otrzymujemy rozwiązanie:

$$\boxed{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sinh(t)c_1 + \cosh(t)c_2 \\ \cosh(t)c_1 + \sinh(t)c_2 \end{bmatrix}}$$

3. Ponieważ funkcje stojące przed pochodną i funkcją są analityczne, zatem podstawiamy:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

otrzymując:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=2} a_n n(n-1)t^{n-2} - 2t\sum_{n=1} a_n n t^{n-1} + 8\sum_{n=0} a_n t^n \\ &= \sum_{n=0} a_{n+2}(n+2)(n+1)t^n - \sum_{n=1} 2a_n n t^n + 8\sum_{n=0} a_n t^n \\ &= 2a_2 + 8a_0 + +6a_3 t - 2a_1 t + 8a_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} t^n \left(a_{n+2}(n+2)(n+1) - 2na_n + 8a_n\right) \\ &\implies a_2 = -4a_0 \\ &\implies a_3 = -a_1 = 0 \quad \text{z warunku } x'(0) = 0 \\ &\implies a_{n+2} = 2a_n \frac{n-4}{(n+2)(n+1_)} \end{aligned}$$

Zatem otrzymujemy wyrazy:

$$\begin{aligned} &a_0 \\ &a_1 = 0 \\ &a_2 = -4a_0 \\ &a_3 = 0 \\ &a_4 = a_{2+2} = 2a_2\frac{2-4}{(2+2)(2+1)} = -8a_0\frac{-2}{12} = \frac{4}{3}a_0 \\ &a_5 = 0 \\ &a_6 = a_{4+2} = 2a_4\frac{4-4}{(4+2)(4+1)} = 0 \end{aligned}$$

i wielomian będący rozwiązaniem:

$$\boxed{x(t) = a_0\left(1 - 4t^2 + \frac{4}{3}t^4\right)}$$

Poprawa kolokwium 1, grupa 2

15/12/2025

1. Rozwiąż poniższe zagadnienia różniczkowe:
   - ☛ *(2 pkt)* Rozwiąż poniższe równanie:
   $$tx'(t) + x(t) - e^t = 0$$
   - ☛ *(3 pkt)* Rozwiąż zagadnienie Cauchy'ego poprzez podstawwienie odpowiedniego ansatzu:
   $$t^2x''(t) - 5tx'(t) + 9x(t) = 0, \qquad x(1) = 1, \quad x'(1) = 0$$
2. Podaj rozwiązanie ogólne układu:
$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$$
3. Rozwiąż poniższe równanie różniczkowe korzystając z podstawienia szeregu.
$$x''(t) - 2tx'(t) + 10x(t) = 0, \qquad x(0) = 0$$
   Znajdź rozwiązanie, które jest wielomianem, zapisz je jawnie.

Przykładowe rozwiązania grupy 2

1. ☛ Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne:

$$tx'(t) + x(t) = 0$$

Poprzez rozdzielenie zmiennych otrzymamy:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -\frac{1}{t}$$

a zatem całkując obustronnie:

$$\ln\left(x(t)\right) = \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = -\int \frac{dt}{t} = -\ln(t) + \tilde{C} = \ln\left(\frac{C}{t}\right)$$

a zatem z jednoznaczności logarytmu jako funkcji różnowartościowej:

$$x(t) = \frac{C}{t}$$

Aby rozwiązać równanie niejednorodne, stosujemy zamianę $C \mapsto C(t)$ i podstawiamy do oryginalnego równania różniczkowego:

$$\begin{aligned}
0 &= tx'(t) + x(t) - e^t \\
&= t\left(\frac{C(t)}{t}\right)' + \frac{C(t)}{t} - e^t \\
&= \frac{tC'(t)}{t} - t\frac{C(t)}{t^2} + \frac{C(t)}{t} - e^t \\
&= C'(t) - e^t \\
&\implies C'(t) = e^t \implies C(t) = e^t + c
\end{aligned}$$

A zatem otrzymujemy rozwiązanie ogólne:

$$\boxed{x(t) = \frac{C(t)}{t} = \frac{e^t + c}{t}}$$

☛ Rzeczone równanie różniczkowe rozwiążemy poprzed podstawienie ansatzu $x(t) \propto t^m$. Otrzymujemy wówczas równanie:

$$0 = t^2 m(m-1)t^{m-2} - 5tmt^{m-1} + 9t^m \implies m^2 - m - 5m + 9 = (m-3)^2 = 0$$

A zatem otrzymujemy jedno rozwiązanie:

$$x_1(t) = t^3$$

Drugie rozwiązanie, liniowo niezależne, otrzymamy z wykorzystaniem wrońskianu. Z wzoru Abela otrzymujemy:

$$W(t) = c\exp\left(-\int \frac{-5t}{t^2} dt\right) = c\exp\left(5\int \frac{dt}{t}\right) = \tilde{c}\exp\left(5\ln(t)\right) = \tilde{c}t^5$$

Zaś drugie rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= x_1(t)\int \frac{W(t)}{x_1(t)^2}dt \\
&= t^3\int \frac{t^5}{(t^3)^2}dt \\
&= t^3\int \frac{t^5}{t^6}dt \\
&= t^3\int \frac{dt}{t} \\
&= t^3\ln(t) + t^3\overline{c}
\end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem rozwiązanie ogólne:

$$x(t) = c_1t^3 + c_2t^3\ln(t)$$

Podstawiając zadane warunki:

$$1 = x(1) = c_1 + c_2\ln(1) = c_1$$

oraz, z warunku na pochodną:

$$\begin{aligned}
0 &= x'(1) \\
&= \frac{d}{dt}\left(t^3 + c_2t^3\ln(t)\right)\Big|_{t=1} \\
&= \left(3t^2 + 3c_2t^2\ln(t) + c_2t^3\cdot\frac{1}{t}\right)\Big|_{t=1} \\
&= 3 + 0 + c_2 \\
&\implies c_2 = -3
\end{aligned}$$

A zatem pełne rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego:

$$\boxed{x(t) = t^3 - 3t^3\ln(t)}$$

2. Z oznaczeniami z wykładu rozpoznajemy:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A zatem, wykorzystując diagonalizację, potrzebujemy znaleźć wektory i wartości własne tej macierzy.

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1 \implies \lambda = \pm 1$$

Zatem:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_+ \\ y_+ \end{bmatrix} = -(x_+ + y_+)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \vec{v}_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_- \\ y_- \end{bmatrix} = (x_- - y_-) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \vec{v}_- = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stąd diagonalizacja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Macierz odwrotna dla macierzy 2×2 może być otrzymana:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Stąd:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A zatem:

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \exp\left(t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & -e^t \\ e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t + e^{-t} & -e^t + e^{-t} \\ -e^t + e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh(t) & -\sinh(t) \\ -\sinh(t) & \cosh(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tak więc, rozwiązanie ogólne ma postać:

$$\boxed{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cosh(t) - c_2 \sinh(t) \\ -c_1 \sinh(t) + c_2 \cosh(t) \end{bmatrix}}$$

3. Ponieważ funkcje stojące przed pochodną i funkcją są analityczne, zatem podstawiamy:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

otrzymując:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=2} a_n n(n-1) t^{n-2} - 2t \sum_{n=1} a_n n t^{n-1} + 10 \sum_{n=0} a_n t^n \\ &= \sum_{n=0} a_{n+2}(n+2)(n+1) t^n - \sum_{n=1} 2 a_n n t^n + 10 \sum_{n=0} a_n t^n \\ &= 2a_2 + 10a_0 + +6a_3 t - 2a_1 t + 10 a_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} t^n \left(a_{n+2}(n+2)(n+1) - 2n a_n + 10 a_n\right) \\ &\implies a_2 = -5a_0 = 0 \quad \text{z warunku } x(0) = 0 \\ &\implies a_3 = -\frac{4}{3} a_1 \\ &\implies a_{n+2} = 2a_n \frac{n-5}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

Zatem otrzymujemy wyrazy:

$$\begin{aligned}
&a_0 = 0 \\
&a_1 \\
&a_2 = 0 \\
&a_3 = a_{1+2} = -\frac{4}{3}a_1 \\
&a_4 = 0 \\
&a_5 = a_{3+2} = 2a_3\frac{3-5}{(3+2)(3+1)} = -\frac{8}{3}a_1\frac{-2}{5\cdot 4} = \frac{4}{15}a_1 \\
&a_6 = 0 \\
&a_7 = a_{5+2} = 2a_5 \cdot \frac{5-5}{(5+2)(5+1)} = 0
\end{aligned}$$

i wielomian będący rozwiązaniem:

$$\boxed{x(t) = a_1\left(t - \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{15}t^5\right)}$$