09/12/2025

Równanie przewodnictwa cieplnego

Podsumowując ubiegłe ćwiczenia, chciałem szczególną uwagę zwrócić na równanie przewodnictwa cieplnego. Podobne rozumowania pojawiają się dość często w fizyce, stąd wydaje mi się na miejscu uporządkowanie i ponowne przedstawienie rozwiązania z ćwiczeń.

Równanie różniczkowe w postaci;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \ \mathrm{Lap}(u) \tag{1}$$

gdzie Lap to operator Laplace'a, zaś k to dodatnia stała, nazywane jest równaniem przewodnictwa cieplnego, lub równaniem dyfuzji. Nazwy te sugerują fizyczne zastosowania: wówczas funkcję u interpretuje się jako odpowiednio temperaturę lub gęstość materii. Istotnie skupiając się na tej drugiej interpretacji można zauważyć, że dla ustalonej objętości $V \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_V u \ dV &= \int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV \\
&= \int_V k \ \mathrm{Lap}(u) \ dV \\
&= k \int_V \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}(u)\right) \ dV \\
&= k \int_{\partial V} \mathrm{grad}(u) \bullet d\left(\partial V\right)
\end{aligned}$$

gdzie w ostatnim przejściu wykorzystaliśmy twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego. Co to równanie w praktyce oznacza? Po lewej stronie równania mamy zmianę materii zawartej w określonej objętości. Jak się domyślamy, materia taka nie może zostać spontanicznie stworzona/zniszczona - i dokładnie o tym mówi nam prawa strona równania. Całka powierzchniowa z gradientu gęstosci jest bowiem niczym innym jak strumieniem materii przez tę powierzchnię. Zatem zmiana ilości materii w objętości jest powodowana przepływem.

Przechodząc do bardziej matematycznych zagadnień i skupiając się na treści zadania, oprócz samego równania, ograniczonego do jednego wymiaru, dostaliśmy również pewne warunki, które muszą zostać spełnione:

$$L > 0 \qquad u(t, 0) = u(t, L) = 0 \qquad u(0, x) = f(x)$$

Możemy myśleć o tych warunkach jako:

- ☛ L jest długością metalowego pręta
- ☛ u jest temperaturą w każdym jego punkcie w danej chwili
- ☛ $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ oznacza, że interesuje nas wyłacznie temperatura pręta, a np. jego boki są umocowane w chłodnicy
- ☛ $u(0, x) = f(x)$ jest początkowym rozkładem temperatur, np.: nagrzaliśmy jeden fragment i chcemy zobaczyć, jak temperatura rozłoży się po pewnym czasie.

Przechodzac teraz do rozwiązania, załóżmy że można je zapisać z rozdzieleniem zmiennych, tzn.:

$$u(t,x) = T(t) \cdot X(x)$$

Wówczas, stosując skróconą notację $T = T(t)$, $\dot{T} = \frac{d}{dt}T$, $X = X(x)$, $X' = \frac{d}{dx}X$, otrzymamy:

$$\dot{T}X = kTX'' \implies \frac{\dot{T}}{T} = k\frac{X''}{X}$$

Prawa strona jest funkcją zależną wyłacznie od czasu, lewa - wyłacznie od położenia. Zatem aby takie funkcje były sobie tożsamościowo równe, musza być one po prostu stałe, a wartość tę nazwijmy $\lambda \in \mathbb{R}$. Otrzymujemy stąd zatem dwa równania różniczkowe (w których funkcje są uwarunkowane parametrem, stąd indeks):

$$\dot{T}_\lambda = \lambda T_\lambda \implies T_\lambda(t) \propto e^{\lambda t}$$
$$X''_\lambda = \frac{\lambda}{k} X_\lambda$$

Zauważmy teraz, że warunki brzegowe wprowadzają pewne ograniczenia na λ. Skoro bowiem $T_\lambda(t) \propto e^{\lambda t} \neq 0$ (ponieważ $\lambda \in \mathbb{R}$), zatem musi zachodzić:

$$X_\lambda(0) = X_\lambda(L) = 0$$

Rozważmy teraz rozwiązania równania $X''_\lambda = \frac{\lambda}{k}X_\lambda$ w zależności od parametru λ. Zauważmy, że stałe w rozwiązaniach należy traktować jako zależne od parametru.

☛ $\lambda > 0 \implies X_\lambda(x) = C_1(\lambda)\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x\right) + C_2(\lambda)\exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x\right)$, a zatem:

$$\begin{cases} 0 = C_1(\lambda) + C_2(\lambda) \\ 0 = C_1(\lambda)\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}L\right) + C_2(\lambda)\exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{k}}L\right) \end{cases}$$
$$\implies C_2(\lambda) = -C_1(\lambda)$$
$$\implies \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}L\right) = \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{k}}L\right) \quad \vee \quad C_1(\lambda > 0) = 0$$

przy czym pierwsza możliwość jest spełniona wyłacznie, gdy $L = 0$ (ponieważ eksponenta rzeczywista jest funkcją różnowartościową na całej swojej dziedzinie, w szczególności nie jest parzysta), zaś jest to sprzeczne z założeniem $L > 0$. Druga opcja daje z kolei rozwiązanie trywialne, którego nie mozna dopasować do warunku $u(0,x) = f(x)$. Stąd wnioskujemy, że λ nie może być parametrem dodatnim.

☛ $\lambda = 0 \implies X''_\lambda = 0 \implies X_\lambda(x) = c_1(\lambda)x + c_2(\lambda)$. Podobnie, $X_\lambda(0) = 0 \implies c_2(\lambda = 0) = 0$, $X_\lambda(L) = c_1(\lambda)L = 0 \implies c_1(\lambda = 0) = 0$.

☛ Pozostaje nam zatem ujemny parametr λ. Dla prostoty dalszego zapisu przyjmijmy $\frac{\lambda}{k} = -\omega^2$, $\omega > 0$, poszukujemy warunku na ω. Wówczas

$$X_\lambda(x) = C_1(\lambda)\cos(\omega x) + C_2(\lambda)\sin(\omega x)$$

Z‘ pierwszego warunku:

$$0 = X_\lambda(0) = C_1(\lambda)$$

Drugi warunek:

$$0 = X_\lambda(L) = C_2(\lambda)\sin(\omega L)$$

nie daje nam warunku na $C_2(\lambda)$, zaś na ω, wiemy bowiem że

$$\sin(n\pi) = 0, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

stąd:

$$n\pi = \omega L \implies \sqrt{-\frac{\lambda}{k}} = \omega = \frac{n\pi}{L} \implies \lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}k$$

Teraz znowu, możemy ograniczyć trochę parametr n: po pierwsze, interesuje nas wyjściowo λ, która jest parzysta w n, zatem możemy ograniczyć się wyłącznie do nieujemnych $n \in \mathbb{N}_0$. Drugi aspekt, dla $n = 0 \implies X_\lambda(x) = 0$, również daje trywialne rozwiązanie, które możemy pominąć. Stąd $n \in \mathbb{N}$. Pracowanie na liczbach naturalnych jest łatwiejsze, więc zmieńmy notację:

$$\begin{aligned} T_{\lambda(n)} &\mapsto T_n \\ X_{\lambda(n)} &\mapsto X_n \\ C_2(\lambda(n)) &\mapsto C_n \end{aligned}$$

Fizyczne spostrzeżenie: Choć rozważaliśmy czysto matematyczne powody, dla których λ musi przybierać ujemne wartości, w pewnych warunkach można nadać temu sens fizyczny. Skupmy się znowu na rozważeniu temperatury. Nawet jeśli układ został nagrzany nierówno, wiemy że będzie on dążył do stanu równowagi termodynamicznej, i uznajmy że przyjmujemy takie jednostki, aby stan równowagi odpowiadał $u = 0$. W tym kontekście, równanie czasowe, które otrzymaliśmy:

$$\frac{\dot{T}}{T} = \lambda$$

od razu sugeruje, że $\lambda < 0$. Pochodna musi mieć bowiem przeciwny znak do samej funkcji - jeśli temperatura jest za duża, otoczenie będzie przejmowało energię i temperatura maleje, czyli pochodna jest ujemna. Analogicznie w drugą stronę.

Ponieważ nasze oryginalne równanie różniczkowe jest liniowe, mozemy wziąć dowolną liniową kombinację rozwiązań i otrzymać:

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} C_n T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

z odpowiednimi stałymi C_n, które pozwolą nam dopasować "temperaturę" do warunków początkowych:

$$f(x) = u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

które ewidentnie sugeruje powiązanie z szeregami Fouriera. Jeśli zatem funkcja f jest wystarczająco "dobra", tak aby powyższy szereg zbiegał do niej (prawie wszędzie[1]), wówczas korzystając z dotychczas wyznaczonych na wykładzie i ćwiczeniach wzorów otrzymamy:

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

co kończy wyprowadzanie wzoru z zadania.

[1] To jest matematyczne określenie mówiące, że pewne zbiory nas nie interesują. W "codziennym" użyciu, gdy nie jest zaznaczone inaczej lub gdy nie rozmawiacie z profesjonalnymi matematykami, prawie wszędzie oznacza prawie wszędzie według miary Lebesgue'a. Po prostu - nie interesują nas teraz pojedyncze punkty, zbiory przeliczalne itd.