02/12/2025

Pełne obliczenia $J_{1/2}$

Podczas zajęć przeszliśmy przez obliczenia, krok po kroku pokazując co się zmienia, jakie przekształcenia stosujemy, niemniej chciałbym jeszcze raz przedstawić to państwu, w pełni.

Przypomnijmy, że wiemy:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

gdyż obliczyliśmy tę wartość korzystając z odpowiedniego podstawienia w całce oraz triku, polegającego na wykorzystaniu współrzędnych sferycznych. Z szeregu definiującego funkcje Bessela pierwszego rodzaju rzędu ν:

$$J_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+\nu+n)} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}$$

zatem, podstawiając $\nu = 1/2$:

$$\begin{aligned} J_{1/2}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+n)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}+n\right)} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1} \end{aligned}$$

Przechodząc do funkcji $\Gamma(n+3/2)$ w mianowniku:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) &= \left(n+\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(n-\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \prod_{k=0}^{n} \left(k+\frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{\pi} \prod_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}} \prod_{k=0}^{n} (2k+1) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}} \prod_{k=1}^{n+1} (2k-1) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}} (2n+1) \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że:

$$
\begin{aligned}
(2n)! &= \prod_{k=1}^{2n} k && = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot \dots \cdot 2n \\
&= \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot \prod_{k=1}^{n} 2k && = (1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)) \cdot (2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n) \\
&= \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot 2^n \prod_{k=1}^{n} k && = (1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)) \cdot 2^n \, (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n) \\
&= 2^n n! \, \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot \\
&\implies \prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \\
&\implies \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}} (2n+1) \cdot \frac{(2n)!}{2^n n!} \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}} \cdot \frac{(2n+1)!}{2^n n!}
\end{aligned}
$$

Podstawiając ten wynik do szeregu:

$$
\begin{aligned}
J_{1/2}(t) &= \sqrt{\frac{2}{t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \, \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1} \\
&= \sqrt{\frac{2}{t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{2^{2n+1} n!}{\sqrt{\pi}(2n+1)!} \cdot \frac{t^{2n+1}}{2^{2n+1}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{t\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin(t)
\end{aligned}
$$

z szeregu Maclaurina.

Podsumowanie informacji o funkcjach Bessela

- ☛ Funkcje Bessela są rozwiązaniami równania różniczkowego:

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}+\left(t^2-\nu^2\right)x=0$$

- ☛ Liczba rzeczywista $\nu \in \mathbb{R}$ jest nazywana rzędem równania, a tym samym rzędem rozwiązania.

- ☛ Rozwiązując je poprzez podstawienie szeregu (w $t=0$, będącym punktem regularnym osobliwym równania), otrzymujemy funkcje pierwszego rodzaju:

$$J_\nu(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(n+1+\nu\right)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}$$

- ☛ Jeśli $\nu \notin \mathbb{Z}$, wówczas rozwiązania J_ν oraz $J_{-\nu}$ są liniowo niezależne, ponieważ dla $t \to 0$ otrzymujemy:

$$J_\nu(t)\propto t^\nu \implies \begin{cases} \nu>0 \implies \lim_{t\to 0} J_\nu(t)=0 \\ \nu<0 \implies \lim_{t\to 0} J_\nu(t)=\infty \end{cases}$$

  Ogólnym rozwiązaniem jest zatem:

$$x(t)=c_1J_\nu(t)+c_2J_{-\nu}(t)$$

- ☛ W przypadku, gdy $\nu \in \mathbb{Z}$, otrzymujemy:

$$J_{-\nu}=(-1)^\nu J_\nu$$

  zatem potrzeba skonstruować drugie rozwiązanie. Okazuje się, że jest nim:

$$Y_\nu(t)=\lim_{\eta\to\nu}\frac{\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{J_\eta(t)\cos\left(\pi\eta\right)-J_{-\eta}(t)\right\}}{\frac{\partial}{\partial\eta}\sin\left(\pi\eta\right)}$$

  a rozwiązanie ma postać:

$$x(t)=c_1J_\nu(t)+c_2Y_\nu(t)$$

- ☛ W przypadku nauk fizycznych, funkcje Bessela znajdują zastosowania w rozwiązywaniu problemów cylindrycznych lub sferycznych, na przykład: drgania membrany bębna czy opisywanie cząstek kwantowomechanicznych w cylindrycznych studniach potencjału.

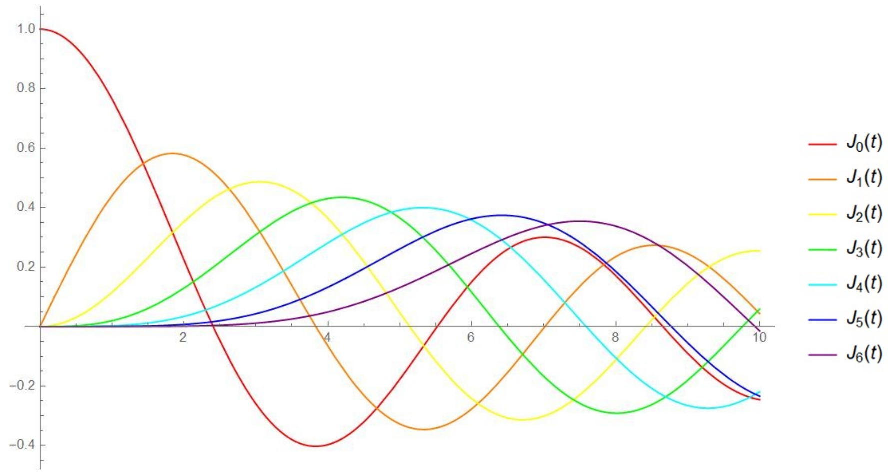
- ☛ Graficzne porównanie funkcji Bessela znajduje się na grafikach poniżej

Wielomiany Hermite'a

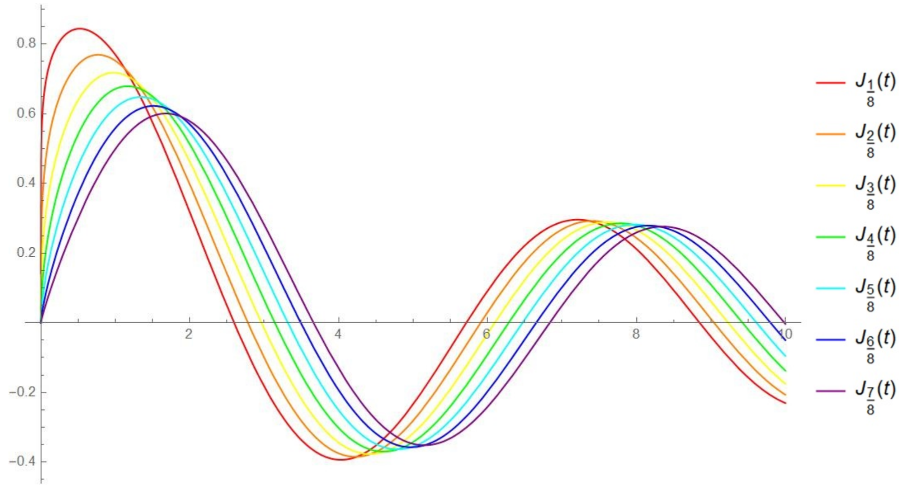
Co prawda na zajęciach funkcje te pojawiły się wyłącznie w obliczeniach z funkcji generującej, jednak postanowiłem przygotować krótką notatkę również na ich temat.

- ☛ Równaniem Hermite'a nazwiemy równanie różniczkowe:

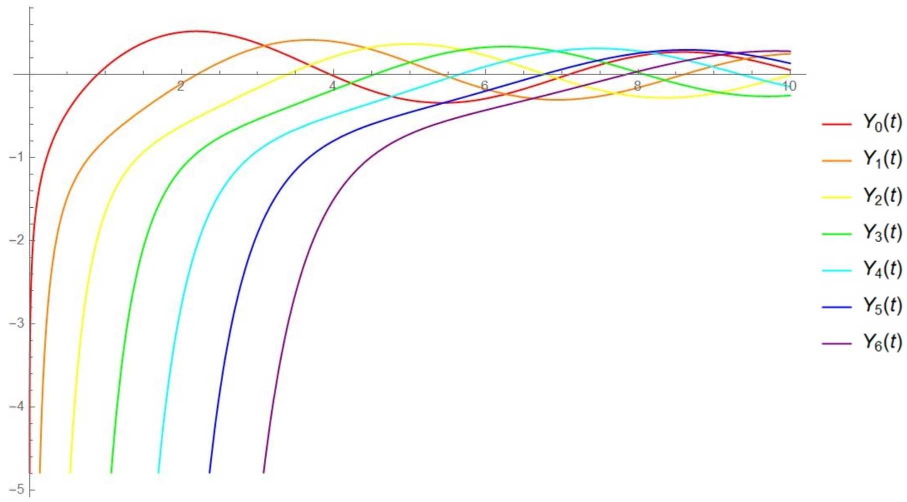
$$\frac{d^2x}{dt^2}-2t\frac{dx}{dt}+2nx=0$$



Rysunek 1: Funkcje Bessela pierwszego rodzaju dla całkowitych rzędów



Rysunek 2: Funkcje Bessela pierwszego rodzaju dla niecałkowitych rzędów



Rysunek 3: Funkcje Bessela drugiego rodzaju

☛ Wielomiany Hermite'a stopnia n są rozwiązaniami wielomianowymi powyższego równania. Można je uzyskać dzięki funkcji generującej, poznanej na ćwiczeniach:

$$H_n(t) = \frac{d^n}{ds^n} e^{-s^2+2st}\bigg|_{s=0}$$

jak również ze wzoru Rodriguesa:

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$$

☛ Podobnie jak wielomiany Legendre'a, stopień wielomianu odzwierciedla ich parzystość:

  ☞ dla parzystych n, wielomiany te zawierają wyłącznie wyrazy z parzystymi potęgami, a zatem są funkcjami parzystymi

  ☞ dla nieparzystych n, wielomiany zawierają wyłacznie nieparzyste potęgi, a zatem są funkcjami nieparzystymi

☛ Relację rekurencyjną wyprowadziliśmy na zajęciach:

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t)$$

☛ Różniczkując obustronnie wzór Rodriguesa otrzymamy również relację:

$$H_n'(t) = 2tH_n(t) - H_{n+1}(t)$$

z czego łato wynika

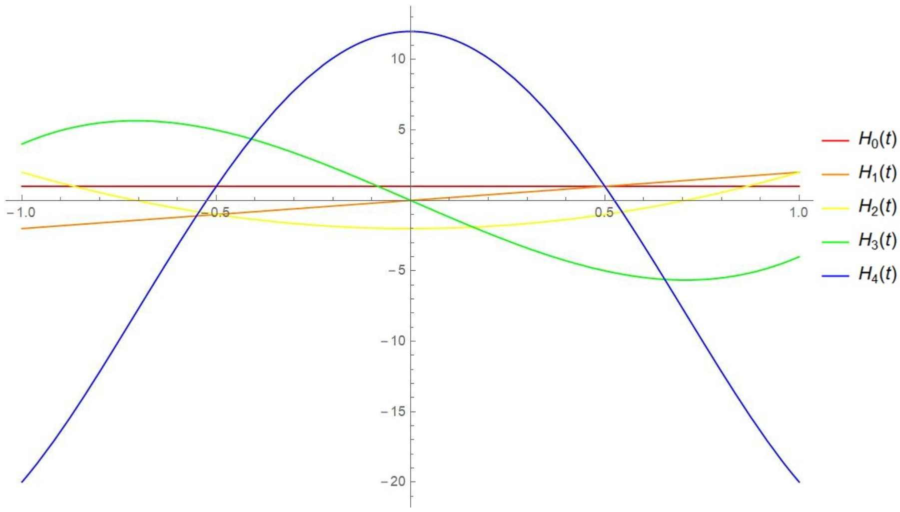
$$H_n'(t) = 2nH_{n-1}(t)$$

☛ Wielomiany Hermite'a są również przykładem funkcji ortogonalnych w bardzo specyficznej przestrzeni. Nie wchodzac w szczegóły, spełniają one relację całkową:

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(t) H_m(t) e^{-t^2} dt = 2^n\ n!\ \sqrt{\pi}\delta_{mn}$$

☛ Jeśli chodzi o zasosowania fizyczne, wielomiany Hermite'a pojawiaj sie miedzy innymi w kwantowym jednowymiarowym oscylatorze harmonicznym.

☛ Ponizsza grafika przedstawia pierwsze wielomiany Hermite'a



Rysunek 4: Wykresy pierwszych wielomianow Hermite'a