18/11/2025

Rozkład funkcji wymiernej na pierwiastki proste

Podczas ćwiczeń pojawiły się wątpliwości co do rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste. Próbowaliśmy rozłożyć na ułamki proste wyrażenie:

$$\frac{1}{(1-t^2)\left(3t^2-1\right)^2} \tag{1}$$

Pytanie brzmiało, dlaczego zasugerowany przeze mnie rozkład:

$$(1) = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{\sqrt{3}t-1} + \frac{D}{\left(\sqrt{3}t-1\right)^2} + \frac{E}{\sqrt{3}t+1} + \frac{F}{\left(\sqrt{3}t+1\right)^2}$$

zawiera zarówno wyrazy z, jak i bez kwadratu.

Rozpatrzmy zatem ogólny przypadek. Wyróżnić należy przypadki gdy rozważamy ciało domknięte algebraicznie (takim jak na przykłąd liczby zespolone) albo nie. Dla przypomnienia, ciało domknięte algebraicznie jest to takie ciało, w którym każdy wielomian dodatniego stopnia[1] ma pierwiastek. Dla liczb rzeczywistych oczywistym jest, że wielomian x^2+1 nie ma rozwiązań - stąd ciało to rozszerza się do liczb zespolonych. Z kolei **zasadnicze twierdzenie algebry** głosi, że suma krotności pierwiastków zespolonych wielomianu (zospolonego, rzeczywistego) jest równa stopniowi tego wielomianu, oraz że można zatem przedstawić go jako iloczyn:

$$\mathbb{C}: \qquad \sum_{l=0}^{n} a_l x^l = \alpha \prod_{j=1}^{k} (x-b_j)^{s_j}, \qquad \sum_{j=1}^{k} s_j = n$$

W przypadku ciała liczb rzeczywistych wielomiany drugiego stopnia mogą być nierozkładalne, stąd wprowadzane są niezależnie:

$$\mathbb{R}: \qquad \sum_{l=0}^{n} a_l x^l = \alpha \cdot \left(\prod_{j=1}^{k} (x-b_j)^{s_j}\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{l} \left(c_j x^2 + d_j x + e_j\right)^{r_j}\right), \qquad \sum_{j=1}^{k} s_j + 2\sum_{j=1}^{l} r_j = n$$

Twierdzenie 0.1. *Rozważmy zatem wielomiany p, q takie że stopnień $p <$ stopnia q, i utwórzmy z nich funkcję wymierną*

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

Jeśli q można rozłożyć do postaci

$$q(x) = \alpha \prod_{j=1}^{k} (x-b_j)^{s_j}, \qquad \sum_{j=1}^{k} s_j = n$$

wówczas:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{s_j} \frac{A_{jl}}{(x-b_j)^l} \tag{2}$$

[1] Czyli po prostu wielomian nierówny stałej

dla odpowiednich stałych A_{jl} należących do danego ciała. Jeśli zaś pracujemy nad liczbami rzeczywistymi i w rozkładzie pojawia się nierozkładalny trójmian kwadratowy:

$$q(x) = \alpha \cdot \left(\prod_{j=1}^{k} (x-b_j)^{s_j}\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{m} \left(c_j x^2 + d_j x + e_j\right)^{r_j}\right), \qquad \sum_{j=1}^{k} s_j + 2\sum_{j=1}^{m} r_j = n$$

wówczas powyższa suma zostanie zmodyfikowana do postaci:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{s_j} \frac{A_{jl}}{(x-b_j)^l} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{r_j} \frac{B_{jl}\ x + C_{jl}}{(c_j x^2 + d_j x + e_j)^l} \tag{3}$$

Jak myśleć o takim rozkładzie, skąd biorą się te krotne pierwiastki? Wydaje mi się, że najprościej jest pomyśleć o liczbie parametrów, które potrzebujemy uzyskać. Wielomian q jest stopnia n, i tyle właśnie parametrów potrzeba uzyskać - po kolei

- ☛ aby uzyskać parametry w powyższych równaniach, najłatwiej chyba przemnożyć obie strony przez $q(x)$
- ☛ rozważmy człon $A_{11}/(x-b_1)$, mnożymy go przez $q(x)$ co da nam wielomian stopnia $n-1$
- ☛ taki wielomian jest charakteryzowany przez dokadnie n współczynników: $a_0, ..., a_{n-1}$
- ☛ zatem sumarycznie, po prawej stronie uzyskujemy wielomian stopnia $n-1$
- ☛ po lewej stronie mamy cały czas wielomian $p(x)$
- ☛ wielomiany te są sobie równe $\iff$ współczynniki przy odpowiednich wyrazach są sobie równe
- ☛ uzyskujemy układ n równań dla n niewiadomych

Gdybyśmy pominęli zatem którąś krotność podczas rozważań, nie bylibyśmy w stanie (w ogólności) rozwiązać układu, otrzymując n równań dla $n-1$ (lub mniej) stałych niewiadomych.

Uwaga, nie świadczy to bynajmniej o tym, że część stałych się nie "wyzeruje" podczas obliczeń, jednak musimy to faktycznie policzyć.

Rozważmy kilka przykładów, zacznijmy od czegoś prostego:

$$\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{t-1}{t^3}$$

Łatwo zauważyć, że

$$\frac{t-1}{t^3} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} = \frac{0}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{-1}{t^3}$$

czyli potrzebowaliśmy dwu- i trzy-krotności.

Rozważmy inny przykład, w którym licznik jest stały (czyli przypomina przykład z ćwiczeń (1)):

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{x^2\,(x-1)^3}$$

Jak można się spodziewać, dostaniemy pięć stałych:

$$\frac{1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

co daje po przemnożeniu obustronnym przez $x^2(x-1)^3$:

$$\begin{aligned}
1 = Ax(x-1)^3 + B(x-1)^3 + Cx^2(x-1)^2 + Dx^2(x-1) + Ex^2 \\
= \quad & A\left(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x\right) \\
& + B\left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) \\
& + C\left(x^4 - 2x^3 + x^2\right) \\
& + D\left(x^3 - x^2\right) \\
& + Ex^2 \\
= \quad & 1 \cdot (-B) \\
& + x(-A + 3B) \\
& + x^2(3A - 3B + C - D + E) \\
& + x^3(-3A + B - 2C + D) \\
& + x^4(A + C)
\end{aligned}$$

i choć układ jest duży, od razu otrzymujemy:

- ☛ $x^0 \implies B = -1$
- ☛ $x^1 \implies A = 3B = -3$
- ☛ $x^4 \implies C = -A = 3$
- ☛ $x^3 \implies D = 3A + 2C - B = -9 + 6 - (-1) = -2$
- ☛ $x^2 \implies E = 3B + D - 3A - C = -3 - 2 - 3(-3) - 3 = 1$

Otrzymujemy zatem rozkład:

$$\frac{1}{x^2(x-1)^3} = -\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$$

w którym wszystkie ułamki proste zostały wykorzystane (żadna stała się nie "wyzerowała"). Oczywiście, ułamek ten jest o wiele prostrzy niż obliczany podczas zajęć, jednak dobrze prezentuje zagadnienie.

Q_2 Legendre'a

Wróćmy zatem do obliczania funkcji Legendre'a drugiego rodzaju. Przypomnijmy, że wielomian Legendre'a drugiego stopnia miał postać:

$$P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$$

zaś Wrońskian:

$$W(t) = \exp\left(-\int \frac{-2t}{1-t^2}dt\right) = \exp\left(-\ln\left(1-t^2\right) + C\right) = \tilde{C}\frac{1}{1-t^2}$$

Przy czym zauważamy, że Wrońskian liczymy lokalnie, dla $t \in (-1,1)$ - ponieważ w takim obszarze rozwijaliśmy w szereg równanie różniczkowe. Na tym przedziale $1-t^2 > 0$, stąd wartość bezwzględna została zdjęta.

Drugie równania Legendre'a drugiego stopnia policzymy ze wzoru:

$$Q_2(t) = P_2(t)\int \frac{W(t)}{(P_2(t))^2}dt \tag{4}$$

otrzymując właśnie wielce problematyczną całkę.

Przyznam, że nie znalazłem łatwiejszego sposobu na policzenie jej[2], zatem ponownie, starannie przedstawię rozkład na ułamki proste.

$$\begin{aligned}\frac{W(t)}{(P_2(t))^2} &= \frac{1}{(1-t^2)\left(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}\right)^2}\\ &= \frac{4}{9}\frac{1}{1-t^2}\frac{1}{\left(t^2-\frac{1}{3}\right)^2}\end{aligned}$$

Dla łatwiejszego zapisu oznaczmy $a = 1/\sqrt{3}$ i skupmy się wyłącznie na ułamku, bez stałej mnożącej $4/9$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-t^2)(t^2-a^2)^2} &= \frac{1}{(1-t)(1+t)\Big((t-a)(t+a)\Big)^2} && (5)\\ &= \frac{1}{(1-t)(1+t)(t-a)^2(t+a)^2} && (6)\\ &= \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{t-a} + \frac{D}{(t-a)^2} + \frac{E}{t+a} + \frac{F}{(t+a)^2} && (7)\end{aligned}$$

[2] Choć jeśli komuś z czytających znana jest prostsza metoda, prosiłbym o podzielenie się nią.

stąd, ponownie mnożąc obie strony przez mianownik lewej strony:

$$\begin{aligned}
1 = \ & A(1+t)(t-a)^2(t+a)^2 + B(1-t)(t-a)^2(t+a)^2 \\
& + C(1-t)(1+t)(t-a)(t+a)^2 + D(1-t)(1+t)(t+a)^2 \\
& + E(1-t)(1+t)(t-a)^2(t+a) + F(1-t)(1+t)(t-a)^2 \\
= \ & A(t^5+t^4-2a^2t^3-2a^2t^2+a^4t+a^4) \\
& + B(2a^2t^3-2a^2t^2-a^4t+a^4-t^5+t^4) \\
& + C(a^2t^3+a^3t^2-a^2t-a^3-at^4+at^2-t^5+t^3) \\
& + D(-a^2t^2+a^2-2at^3+2at-t^4+t^2) \\
& + E(a^2t^3-a^3t^2-a^2t+a^3+at^4-at^2-t^5+t^3) \\
& + F(-a^2t^2+a^2+2at^3-2at-t^4+t^2) \\
= \ & a^4A+a^4B-a^3C+a^2D+a^3E+a^2F \\
& + t\left(a^4A-a^4B-a^2C-a^2E+2aD-2aF\right) \\
& + t^2\left(-2a^2A-2a^2B+a^3C-a^2D-a^3E-a^2F+aC-aE+D+F\right) \\
& + t^3\left(-2a^2A+2a^2B+a^2C+a^2E-2aD+2aF+C+E\right) \\
& + t^4(-aC+aE+A+B-D-F) \\
& + t^5(A-B-C-E)
\end{aligned}$$

Skąd otrzymujemy układ:

$$\begin{bmatrix}
a^4 & -a^4 & -a^3 & a^2 & a^3 & a^2 \\
a^4 & -a^4 & -a^2 & 2a & -a^2 & -2a \\
-2a^2 & -2a^2 & a^3+a & -a^2+1 & -a^3-a & -a^2+1 \\
-2a^2 & 2a^2 & a^2+1 & -2a & a^2+1 & 2a \\
1 & 1 & -a & -1 & a & -1 \\
1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obecnie praktycznie nikt nie liczy takich rzeczy ręcznie, jednak ze względu na charakter dydaktyczny, my na tych zajęciach powinniśmy. Oczywiście metod rozwiązywania równań jest wiele, jednak jako swego rodzaju ciekawostkę chciałem zaprezentować coś odmiennego, od zwykle uczonych na naszym Uniwersytecie metod. Chodzi o metodę uzyskiwania macierzy odwrotnej Gaußa-Jordana. Metodę tę wytłumaczę szybko, zaś po dowód odeślę Państwa do literatury. Podczas jej wykorzystywania unikamy potrzeby liczenia wyznaczników i wielokrotnego redukowania macierzy.

Równanie powyżej ma macierzową postać

$$[A]\,\vec{v} = \vec{u}$$

zatem oczywiście możemy je rozwiązać poprzez:

$$\vec{v} = [A]^{-1}\,[A]\,\vec{v} = [A]^{-1}\,\vec{u}$$

Metoda bezwyznacznikowa uzyskiwania macierzy odwrotnej polega na:

1. rozszerzeniu macierzy $[A]$ o macierz jednostkową tego samego wymiaru:

$$[A] \mapsto \left[A\middle|\mathbb{I}\right]$$

poprzez dostawienei jej po prawej stronie[3]

2. następnie, na tak otrzymanej macierzy możemy przeprowadzać tzw. operacje elementarne:

   ☛ przestawiać dowolne wiersze

   ☛ mnożyć dowolny wiersz przez liczbę

   ☛ dodawać dowolne wiersze do innych - a zatem w połączeniu z poprzednim, stosować ich kombinacje liniowe

3. z wykorzystaniem takich operacji, doprowadzamy macierz $[A|$ do postaci identycznościowej, wówczas macierz po drugiej stronie stanie się macierzą odwrotną:

$$\left[A\middle|\mathbb{I}\right] \mapsto \left[\mathbb{I}\middle|A^{-1}\right]$$

Zaletą takiej metody jest to, że zgodnie z twierdzeniem Gaußa-Jordana, każdą nieosobliwą macierz kwadratową wymiaru $n \times n$ można doprowadzić do postaci jednostkowej najpóźniej w "zaledwie" $2n - 1$ krokach. Algorytm postępowanai jest następujący

1. Ustawiamy wiersze (które dalej będę nazywał r_i) tak, aby w pierwszym wierszu na pierwszym miejscu był wyraz niezerowy

2. Dzielimy r_1 przez pierwszy wyraz A_{11}

$$r_1 \mapsto \frac{r_1}{A_{11}}$$

3. Od każdego kolejnego wiersza r_i odejmujemy nowy wiersz pierwszy przemnożony przez pierwszy wyraz i-tego rzędu:

$$r_i \mapsto r_i - \frac{A_{i1}r_1}{A_{11}}$$

   eliminując wyrazy w pierwszej kolumnie

4. Następnie doprowadzamy do jedności wyraz drugi na diagonali $r_2 \mapsto r_2/A_{22}$ (ewentualnie przemieszczajac rzędy tak, aby był tam wyraz niezerowy)

5. Całą procedurę powtarzamy, otrzymując macierz górnotrójkątną z jedynkami na diagonali

6. A następnie idziemy "w drugą stronę", w wierszu r_{n-1} eliminujemy ostatni wyraz poprzez odjęcie (odpowiednio mnożonego) ostatniego rzędu.

7. I powtarzamy proces tak, aby wyeliminować górne komórki macierzy.

Mam nadzieję, że poniższe obliczenia dobrze zobrazują cały proces. W dalszej części podstawiłem już w postaci jawnej $a = 1/\sqrt{3}$. Macierze są pomniejszone, ponieważ inaczej nie mieszczą się na stronach (i tak jedna jest za duża, musicie Państwo mi wybaczyć).

[3]Oczywiście możemy dostawić ją również z drugiej strony albo pracować na niej osobno, jednak wygodniej jest utrzymywać pewien porządek

Oryginalna, rozszerzona macierz ma postać:

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{4}{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

Stosujemy następujące modyfikacje, aby przeskalować i usunąć nadmierne ułamki:

$$r1 \mapsto 6r_1 \qquad r_2 \mapsto 3r_3 \qquad r_3 \mapsto 9r_2 \qquad r4 \mapsto 3r_4 \qquad r_5 \mapsto r6 \qquad r_6 \mapsto r_5$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & -1 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & -2 & \frac{4}{\sqrt{3}} & 2 & -\frac{4}{\sqrt{3}} & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -3 & 6\sqrt{3} & -3 & -6\sqrt{3} & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 2 & 4 & -2\sqrt{3} & 4 & 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

W pierwszym wierszu na pierwszym miejscu stoi jedynka, zatem stosujemy:

$$r_2 \mapsto r_2 + 2r_1 \qquad r_3 \mapsto r_3 - r_1 \qquad r_4 \mapsto r_4 + 2r_1 \qquad r_5 \mapsto r_5 - r_1 \qquad r_6 \mapsto r_6 - r_1$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & -1 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -4 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 8 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 8 & 18 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{3}-3 & 6\sqrt{3}-3 & -3-\sqrt{3} & -3-6\sqrt{3} & -9 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4-2\sqrt{3} & 6-2\sqrt{3} & 2\left(2+\sqrt{3}\right) & 2\left(3+\sqrt{3}\right) & 18 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{3}-1 & -3 & -1-\sqrt{3} & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 2 & \frac{2}{\sqrt{3}} & -4 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & -4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

Potrzebujemy teraz przeprowadzić dalsze rozumowanie

$$r2 \mapsto -r_2/4 \quad \text{a następnie} \quad r_6 \mapsto r_6 - 2r_2$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & -1 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -2 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -2 & -\frac{9}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{3}-3 & 6\sqrt{3}-3 & -3-\sqrt{3} & -3-6\sqrt{3} & -9 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4-2\sqrt{3} & 6-2\sqrt{3} & 2\left(2+\sqrt{3}\right) & 2\left(3+\sqrt{3}\right) & 18 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{3}-1 & -3 & -1-\sqrt{3} & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

$$r_3 \mapsto \frac{r_3}{\sqrt{3}-3} \quad \text{a następnie} \quad r_4 \mapsto r_4-(4-2\sqrt{3})r_3 \qquad r_5 \mapsto r_5-(\sqrt{3}-1)r_3 \qquad r_6 \mapsto r_6-\frac{r_3}{\sqrt{3}}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & -1 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -2 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -2 & -\frac{9}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\left(-3-5\sqrt{3}\right) & 2+\sqrt{3} & \frac{1}{2}\left(9+7\sqrt{3}\right) & \frac{3}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) & -\frac{3}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5\sqrt{3}-3 & 2\left(1+\sqrt{3}\right) & 9-3\sqrt{3} & 3\left(3+\sqrt{3}\right) & 9-3\sqrt{3} & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3-\sqrt{3} & -2\left(1+\sqrt{3}\right) & -9-\sqrt{3} & -3\left(3+\sqrt{3}\right) & 3\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{3}\right) & -1-\sqrt{3} & \frac{1}{2}\left(-7-3\sqrt{3}\right) & -\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) & \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

$$r_4 \mapsto \frac{r_4}{5\sqrt{3}-3} \quad \text{a następnie} \quad r_5 \mapsto r_5 - (3-\sqrt{3})r_4 \qquad r_6 \mapsto r_6 - \frac{1}{2}(5+\sqrt{3})r_4$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & -1 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -2 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -2 & -\frac{9}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\left(-3-5\sqrt{3}\right) & 2+\sqrt{3} & \frac{1}{2}\left(9+7\sqrt{3}\right) & \frac{3}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) & -\frac{3}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{33}\left(9+4\sqrt{3}\right) & \frac{3}{11}\left(2\sqrt{3}-1\right) & \frac{3}{11}\left(4+3\sqrt{3}\right) & \frac{3}{11}\left(2\sqrt{3}-1\right) & 0 & \frac{1}{22}\left(3+5\sqrt{3}\right) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{11}\left(4+3\sqrt{3}\right) & -\frac{8}{11}\left(9+4\sqrt{3}\right) & -\frac{12}{11}\left(9+4\sqrt{3}\right) & \frac{3}{11}\left(9+4\sqrt{3}\right) & 0 & \frac{1}{11}\left(3-6\sqrt{3}\right) & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{33}\left(45+31\sqrt{3}\right) & -\frac{10}{11}\left(4+3\sqrt{3}\right) & -\frac{15}{11}\left(4+3\sqrt{3}\right) & \frac{3}{11}\left(5+\sqrt{3}\right) & \frac{3}{2} & \frac{1}{22}\left(-15-14\sqrt{3}\right) & 1 & 0
\end{array}\right]$$

$$r_5 \mapsto -\frac{11r_5}{32+24\sqrt{3}} \quad \text{a następnie} \quad r_6 \mapsto r_6 + \frac{2}{33}(45+31\sqrt{3})r_5$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & -1 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -2 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -2 & -\frac{9}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\left(-3-5\sqrt{3}\right) & 2+\sqrt{3} & \frac{1}{2}\left(9+7\sqrt{3}\right) & \frac{3}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) & -\frac{3}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{33}\left(9+4\sqrt{3}\right) & \frac{3}{11}\left(2\sqrt{3}-1\right) & \frac{3}{11}\left(4+3\sqrt{3}\right) & \frac{3}{11}\left(2\sqrt{3}-1\right) & 0 & \frac{1}{22}\left(3+5\sqrt{3}\right) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & 0 & -\frac{3}{8}\left(\sqrt{3}-2\right) & 0 & \frac{1}{8}\left(4-3\sqrt{3}\right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -\frac{3}{4}\left(1+\sqrt{3}\right) & \frac{3}{2} & \frac{1}{4}\left(-3-\sqrt{3}\right) & 1 & \frac{1}{12}\left(-9-\sqrt{3}\right)
\end{array}\right]$$

Dopasowujemy ostatni wiersz:

$$r_6 \mapsto \frac{1}{2} r_6$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & -1 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -2 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -2 & -\frac{9}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\left(-3-5\sqrt{3}\right) & 2+\sqrt{3} & \frac{1}{2}\left(9+7\sqrt{3}\right) & \frac{3}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) & -\frac{3}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{33}\left(9+4\sqrt{3}\right) & \frac{3}{11}\left(2\sqrt{3}-1\right) & \frac{3}{11}\left(4+3\sqrt{3}\right) & \frac{3}{11}\left(2\sqrt{3}-1\right) & 0 & \frac{1}{22}\left(3+5\sqrt{3}\right) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & 0 & -\frac{3}{8}\left(\sqrt{3}-2\right) & 0 & \frac{1}{8}\left(4-3\sqrt{3}\right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{8}\left(1+\sqrt{3}\right) & \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\left(-3-\sqrt{3}\right) & \frac{1}{2} & \frac{1}{24}\left(-9-\sqrt{3}\right)
\end{array}\right]$$

A teraz zawracamy, i eliminujemy wyrazy w górnej połowie macierzy:

$$r_5 \mapsto r_5 - \sqrt{3} r_6 \qquad r_4 \mapsto r_4 - \frac{3}{11}(2\sqrt{3}-1) r_6 \qquad r_3 \mapsto r_3 - \frac{1}{2}(9+7\sqrt{3}) r_6 \qquad r_2 \mapsto r_2 + 2r_6 \qquad r_1 \mapsto r_1 - 3r_4$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & -1 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & 0 & \frac{9}{2} & \frac{9}{8}\left(1+\sqrt{3}\right) & -\frac{9}{4} & \frac{3}{8}\left(3+\sqrt{3}\right) & -\frac{3}{2} & \frac{1}{8}\left(9+\sqrt{3}\right. \\
0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -2 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4}\left(1+\sqrt{3}\right) & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\left(-3-\sqrt{3}\right) & 1 & \frac{1}{12}\left(-9-\right. \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\left(-3-5\sqrt{3}\right) & 2+\sqrt{3} & 0 & -\frac{3}{4}\left(3+5\sqrt{3}\right) & \frac{3}{8}\left(3+4\sqrt{3}\right) & -\frac{3}{8}\left(9+7\sqrt{3}\right) & 3+\frac{15\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{4}\left(-9-7\sqrt{3}\right) & \frac{17}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{33}\left(9+4\sqrt{3}\right) & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{88}\left(7+19\sqrt{3}\right) & \frac{9}{44}\left(1-2\sqrt{3}\right) & \frac{7}{88}\left(3+5\sqrt{3}\right) & \frac{1}{22}\left(3-6\sqrt{3}\right) & \frac{1}{88}\left(17\sqrt{3}-\right. \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{8}\left(1+\sqrt{3}\right) & \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\left(-3-\sqrt{3}\right) & \frac{1}{2} & \frac{1}{24}\left(-9-\right.
\end{array}\right.$$

$$r_4 \mapsto r_4 - \frac{2}{33}(9+4\sqrt{3}) r_5 \qquad r_3 \mapsto r_3 - (2+\sqrt{3}) r_5 \qquad r_2 \mapsto r_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} r_5 \qquad r_1 \mapsto r_1 - \sqrt{3} r_5$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & -1 & -\sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{9}{8} & 0 & \frac{1}{8}\left(9-6\sqrt{3}\right) & 0 & \frac{1}{8}\left(9-4\sqrt{3}\right) \\
0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -2 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{16}\left(4+3\sqrt{3}\right) & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{16} & \frac{3}{4} & \frac{1}{48}\left(\sqrt{3}-36\right) \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\left(-3-5\sqrt{3}\right) & 0 & 0 & -\frac{3}{4}\left(3+5\sqrt{3}\right) & \frac{3}{8}\left(\sqrt{3}-3\right) & -\frac{9}{8}\left(1+\sqrt{3}\right) & \frac{3}{4}\left(1+\sqrt{3}\right) & -\frac{3}{4}\left(1+\sqrt{3}\right) & \frac{7}{8}\left(1+\sqrt{3}\right) \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{8}\left(\sqrt{3}-1\right) & \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}-3\right) & \frac{1}{2} & \frac{1}{24}\left(\sqrt{3}-9\right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{8}\left(1+\sqrt{3}\right) & \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\left(-3-\sqrt{3}\right) & \frac{1}{2} & \frac{1}{24}\left(-9-\sqrt{3}\right)
\end{array}\right]$$

$$r_3 \mapsto r_3 + \frac{1}{2}(3+5\sqrt{3}) r_4 \qquad r_2 \mapsto r_2 + 2r_4 \qquad r_1 \mapsto r_1 - 3r_4$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & -1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{8}\left(\sqrt{3}-2\right) & -\frac{9}{4} & -\frac{9}{8}\left(\sqrt{3}-2\right) & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4}-\frac{5\sqrt{3}}{8} \\
0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{16}\left(\sqrt{3}-8\right) & \frac{15}{8} & \frac{3}{16}\left(\sqrt{3}-8\right) & \frac{7}{4} & \frac{1}{48}\left(5\sqrt{3}-72\right) \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{8} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{8}\left(\sqrt{3}-1\right) & \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}-3\right) & \frac{1}{2} & \frac{1}{24}\left(\sqrt{3}-9\right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{8}\left(1+\sqrt{3}\right) & \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\left(-3-\sqrt{3}\right) & \frac{1}{2} & \frac{1}{24}\left(-9-\sqrt{3}\right)
\end{array}\right]$$

$$r_2 \mapsto r_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}} r_3 \qquad r_1 \mapsto r_1 + \sqrt{3} r_3$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{4} & 0 & \frac{9}{4} & 0 & \frac{9}{4} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{8} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{8}\left(\sqrt{3}-1\right) & \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}-3\right) & \frac{1}{2} & \frac{1}{24}\left(\sqrt{3}-9\right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{8}\left(1+\sqrt{3}\right) & \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\left(-3-\sqrt{3}\right) & \frac{1}{2} & \frac{1}{24}\left(-9-\sqrt{3}\right)
\end{array}\right]$$

$$r_1 \mapsto r_1 + r_2$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{8} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{8}\left(\sqrt{3}-1\right) & \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}-3\right) & \frac{1}{2} & \frac{1}{24}\left(\sqrt{3}-9\right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{8}\left(1+\sqrt{3}\right) & \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\left(-3-\sqrt{3}\right) & \frac{1}{2} & \frac{1}{24}\left(-9-\sqrt{3}\right)
\end{array}\right]$$

Otrzymaliśmy macierz odwrotną

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{9}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{8} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{8}\left(\sqrt{3}-1\right) & \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}-3\right) & \frac{1}{2} & \frac{1}{24}\left(\sqrt{3}-9\right) \\ 0 & \frac{9}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{8}\left(1+\sqrt{3}\right) & \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\left(-3-\sqrt{3}\right) & \frac{1}{2} & \frac{1}{24}\left(-9-\sqrt{3}\right) \end{bmatrix}$$

a ponieważ nasz wektor

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

zatem odczytujemy z pierwszej kolumny:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przypomnijmy, że policzyliśmy w tym momencie rozkład funkcji podcałkowej na ułamki proste, otrzymując:

$$\frac{W(t)}{\left(P_2(t)\right)^2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \right)$$

Taką postać możemy już łatwo scałkować:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int \frac{W(t)}{\left(P_2(t)\right)^2} dt &= \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \right) dt \\ &= -\ln(1-t) + \ln(1+t) - \frac{1}{t - \frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{t + \frac{1}{\sqrt{3}}} + \tilde{C} \\ &= \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - \frac{2t}{t^2 - \frac{1}{3}} + \tilde{C} \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja ta będzie dalej mnożona przez P_2, zaś rozwiązanie pełne jest kombinacją liniową P_2 oraz Q_2, zatem możemy wybrać $\tilde{C} = 0$. Tym samym:

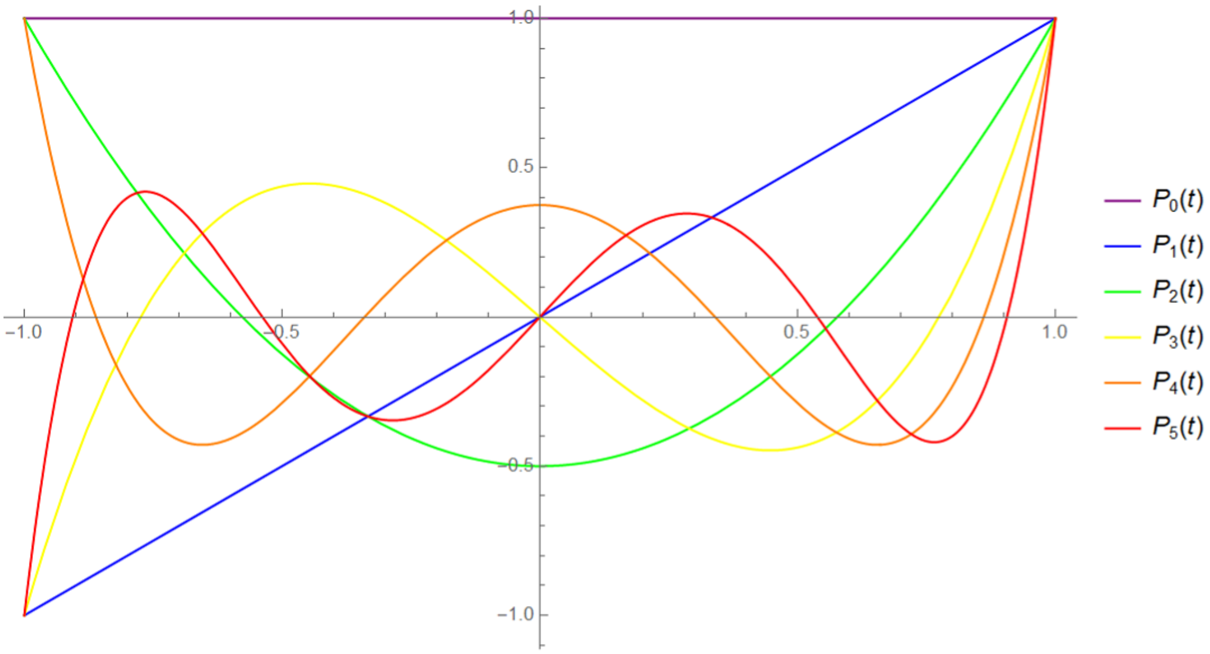
$$\begin{aligned} Q_2(t) &= P_2(t) \int \frac{W(t)}{\left(P_2(t)\right)^2} dt \\ &= \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} \left(\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - \frac{2t}{t^2 - \frac{1}{3}} \right) \end{aligned}$$

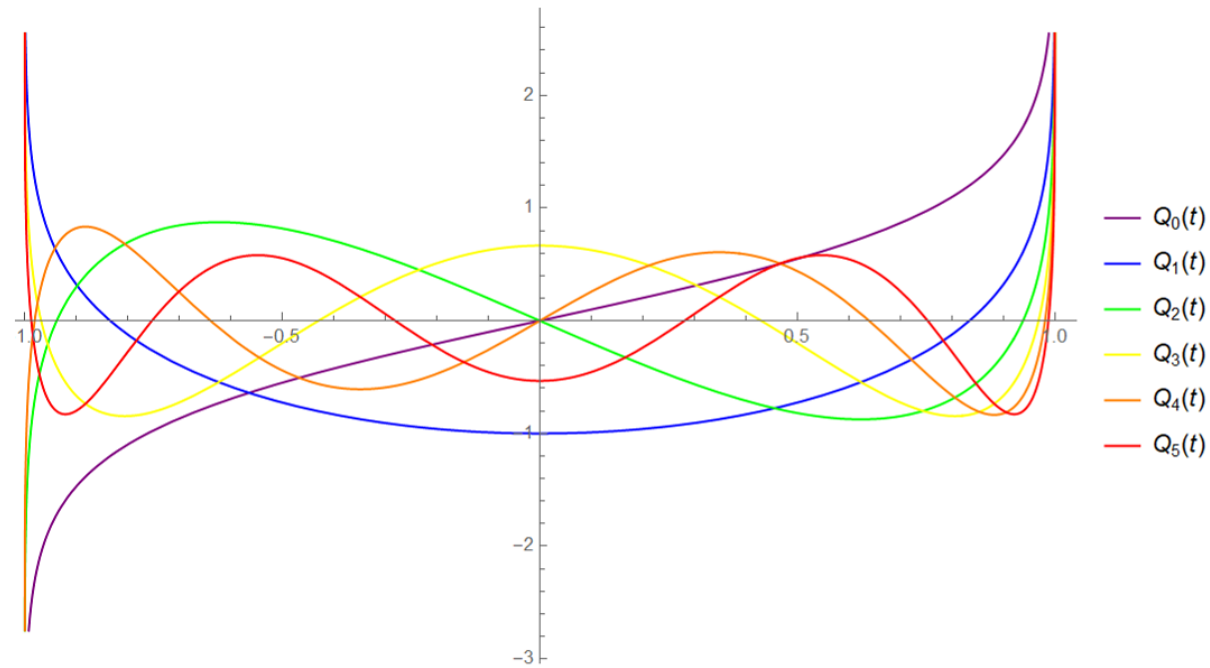
Kilka uwag o funkcjach i wielomianach Legendre'a

Podsumowując zagadnienie, chciałbym podsumować, a także zwrócić Państwa uwagę na kilka faktów, które się pojawiły, lub kilka ciekawostek/dalszych własności omawianych funkcji.

- W celu otrzymania wielomianów Legendre'a, rozwiązywaliśmy równanie różniczkowe:
$$(1-t^2)\frac{d^2x}{dt^2}-2t\frac{dx}{dt}+n(n+1)x=0$$
metodą szeregów potęgowych. Szeregi te były rozwijane w otoczeniu punktu $t=0$, który jest punktem zwyczajnym tego równania. Ponieważ $t=\pm 1$ są punktami osobliwymi, zatem rozwiązania są ważne jedynie na przedziale $t \in (-1,1)$.
- Wielomiany Legendre'a dla n są wielomianami n-tego stopnia.
- Wielomiany Legendre'a stopnia parzystego zawierają jedynie wyrazy o parzystej potędze, zaś wielomiany Legendre'a stopnia nieparzystego - wyłącznie potęgi nieparzyste. Tym samy, wielomiany parzyste są funkcjami parzystymi, zaś nieparzyste - nieparzystymi, co również zostało udowodnione na wykładzie
$$P_n(-t)=(-1)^n\,P_n(t)$$
- Wielomiany Legendre'a są znormalizowane tak, aby $P_n(1)=1$.
- Funkcje Legendre'a drugiego rodzaju nie mają już postaci wielomianu - obliczone wyżej Q_2 zawiera logarytm, a także funkcję wymierną. Jednak, jeśli przypomną sobie Państwo, funkcje te też mają rozwinięcie w szereg potęgowy - jest on nieskończony, opisany wyliczoną relacją rekurencyjną współczynników:
$$c_{j+2}=-\frac{(n-j)(n+j+1)}{(j+2)(j+1)}c_j$$
Funkcje te, w przeciwieństwie do wielomianów, są osobliwe w punktach skrajnych $t\to\pm 1$.
- W dalszej części kursu oraz na innych zajęciach matematycznych spotkają się Państwo z wektorowymi przestrzeniami nieskończonego wymiaru - z przestrzeniami funkcyjnymi. Okazuje się, że z takiej perspektywy (mówiąc dokłądniej: analizujac wielomiany Legendre'a jako elementy przestrzeni Hilberta), mają one kilka praktycznych właściwości:
  - są <u>ortogonalne</u> do kolejnych monomianów:
  $$\int_{-1}^{1} P_n(x)x^m dx = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant m < n$$
  - a także są ortogonalne względem samych siebie:
  $$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

Wykresy pierwszych 6 wielomianó oraz funkcji Legendre'a znajdują się na załączonej grafice.


1.0
0.5
−1.0
−0.5
0.5
1.0
−0.5
−1.0
$P_0(t)$
$P_1(t)$
$P_2(t)$
$P_3(t)$
$P_4(t)$
$P_5(t)$


2
1
−0.5
0.5
−2
−3
$Q_0(t)$
$Q_1(t)$
$Q_2(t)$
$Q_3(t)$
$Q_4(t)$
$Q_5(t)$