04/11/2025

Warunki początkowe w układach równań

Podczas ubiegłych ćwiczeń padło pytanie, jak poradzić sobie z sytuacją, gdy zagadnienie Cauchy'ego ma warunki brzegowe określone dla różnych wartości parametrów, na przykład:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad x_1(a_1) = x_{1,0}, \qquad x_2(a_2) = x_{2,0}$$

Odpowiedzią na to będą metody rozwiązania układów równań liniowych jednorodnych pierwszego stopnia, które mogą przebiegać alternatywnie dla metody zwykładu. W dalszej części rozważań założymy, że układ jest n-wymiarowy (podczas ćwiczeń liczyliśmy wyłącznie dla $n = 2$, jednak teraz rozważania teoretyczne mają charakter ogólny).

- ☛ Podczas wykładu podany był wzór, gdy $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

  $$\vec{x}(t) = \exp(At) \cdot \vec{x}(0) \tag{1}$$

- ☛ Podczas ćwiczeń mieliśmy przykład z warunkiem $a_1 = a_2 = ... = a_n = a \neq 0$, podczas którego wygodnym było przeparametryzować układ do postaci:

  $$\vec{y}(t) = \vec{x}(t + a)$$

  czyli przesunąć układ równań, rozwiązać a następnie ponownie podstawić

  $$\vec{x}(t) = \vec{y}(t - a)$$

  Taka parametryzacja da nam rozwiązanie (1) w postaci:

  $$\vec{x}(t) = \exp(A(t - a)) \cdot \vec{x}(a)$$

To jednak nie kończy możliwości. Istnieją bowiem inne metody sformułowania rozwiązań. Oba przedstawione tutaj sformułowania będą się opierały na znajdowaniu rozwiązania ogólnego, a następnie doborze parametrów dzięki warunkom początkowym.

0.0.1

Niejako "zerowe" podejście do układów równań, szczególnie tylko dwóch zmiennych, opiera się na prostym podstawienu. Jeśli mamy układ jednorodny

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}, \qquad b \neq 0$$

możemy wyznaczyć z pierwszego równania $y = (x' - ax)/b$, a następnie podstawić do drugiego, eliminując tym samym funkcję y z niego i otrzymując:

$$\frac{1}{b}x'' - \frac{a}{b}x' = cx + \frac{d}{b}x' - \frac{ad}{b}x.$$

Równanie to jesteśmy w stanie rozwiązać metodami z poprzednich ćwiczeń. Uzyskujemy rozwiązanie w postaci

$$x = c_1x_1 + c_2x_2$$

a następnie

$$y = \frac{c_1x_1' - ac_1x_1 + c_2x_2' - ac_2x_2}{b}$$

Układ ma oczywiście dwa parametry, c_1, c_2 które wyznaczamy z warunków brzegowych - stąd potrzebne są dwa warunki, dla x oraz dla y.

0.0.2

Kolejnym z metod rozwiązywania będzie uogólnienie wzoru (1). Rozwiązaniem ogólnym układu

$$\vec{x'}(t) = A \cdot \vec{x}(t)$$

będzie

$$\vec{x}(t) = \exp(At)\vec{c}, \qquad \vec{c} \in \mathbb{R}^n$$

$\vec{c}$ jest wektorem parametrów - musimy je znaleźć, aby rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego. Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x_1(a_1) = x_{1,0} \\ \vdots \\ x_n(a_n) = x_{n,0} \end{cases}$$

Zauważmy, że w naszym przypadku dla $a_i = 0$ powyższy układ sprowadza się do

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(0) = \exp(A \cdot 0)\vec{c} = \vec{c}$$

co mieliśmy podane na wykładzie (1).

0.0.3

Następne rozwiązanie opiera się na rozważeniu przestrzeni rozwiązań. Jeśli macierz A jest diagonalizowalna, wówczas niech zbiór par

$$\{(\lambda_k, \vec{v}_k)\}_{k=1}^n$$

będzie zbiorem wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych. Wówczas rozwiązanie ogólne jest kombinacją liniową rozwiązań $\{\vec{u}_k\}_{k=1}^n$ takich że

- ☛ jeśli $\lambda_k \in \mathbb{R}$:
$$\vec{u}_k = e^{\lambda_k t}\vec{v}_k$$
- ☛ jeśli zaś $\lambda_k \in \mathbb{C}$, wówczas istnieje λ_l dla pewnego l taka że $\lambda_k = \overline{\lambda_l}$. Wynika to m.in. z tego, że skoro $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \implies \det A \in \mathbb{R}$, zaś $\det A = \prod_{k=1}^n \lambda_k$. Zauważmy również, że $\overline{\vec{v}_k} = \vec{v}_l$. Wówczas dla pary k, l, odpowiadającymi im wektorami będą
$$\vec{u}_k = \Re\left(e^{\lambda_k t}\vec{v}_k\right), \qquad \vec{u}_l = \Im\left(e^{\lambda_l t}\vec{v}_l\right)$$

Ogólne rozwiązanie ma postać:

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \vec{u}_k$$

Pozostaje zatem z warunków początkowych wyznaczyć odpowiednie wartości c_k. Również tutaj nie wymagaliśmy, aby wartości początkowe zadane były dla $t = 0$, ani aby warunki początkowe były zadane dla jednakowego parametru.

Dodajmy, że w przypadku układów równań niewielu zmiennych, metoda ta jest wyjątkowo praktyczna i szybka - dotychczas i tak diagonalizowaliśmy macierze, jednak później musieliśmy je ponownie wymnażać. Tutaj, ograniczamy się jedynie do wartości i wektorów własnych oraz wyznaczamy stałe.

Zauważmy, że takie rozwiązanie jest istotnie bardzo naturalne. Ustalmy bowiem k, wówczas:

$$\frac{d}{dt}\vec{u}_k = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda_k t}\vec{v}_k\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda_k t}\right)\vec{v}_k = \lambda_k e^{\lambda_k t}\vec{v}_k = e^{\lambda_k t}\lambda_k\vec{v}_k = e^{\lambda_k t}A\vec{v}_k = A\left(e^{\lambda_k t}\vec{v}_k\right) = A\vec{u}_k$$

0.0.4 Dygresja - macierze niediagonalizowalne

W przypadku, gdy macierz A nie jest diagonalizowalna, macierz $\exp(tA)$ wciąż jest macierzą fundamentalną. Choć obliczenie takiej potęgi macierzowej nie należy do łatwych, istnieją pewne sposoby, aby ułatwić ten proces. Choć nie będę wchodził dokładnie w szczegóły, ze względu m.in. na to, że w pracy praktycznej i tak wykorzystuje się metody komputerowe, warto jednak znać podstawy teoretyczne, nawet gdy nie są one integralną częścią kursu.

Ułatwienie, o którym mowa, to macierze Jordana. Otóż dla każdej macierzy kwadratowej $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ istnieje macierz odwaralna $\Delta \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ taka że:

$$A = \Delta \cdot J_A \cdot \Delta^{-1}$$

, gdzie J_A jest macierzą Jordana macierzy A, tzn. składa się ona z klatek:

$$J_A = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & J_{\lambda_2} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \ddots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & J_{\lambda_k} \end{bmatrix}$$

każda zaś klatka J_{λ_i} ma postać górnotrójkątną z wyłącznie wyrazami nad przekątną niezerowymi, tzn.

$$J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

0.0.5 Zadania

Zachęcam Państwa, aby przećwiczyć rozwiązywanie układów równań różniczkowych. Ubolewam nad tym, że na kursie omówiona jest wyłącznie jedna metoda, zaś na ćwiczeniach mieliśmy wyłącznie jedno zadanie na ten temat. Załączam zatem poniżej kilka kolejnych przykładów wraz z wynikami. Ponieważ z licencji uczelnianej powinni mieć Państwo również dostęp do programu Wolfram Mathematica, zachęcam do weryfikowania swoich obliczeń. Kod, który umożliwia rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases} \quad , x(t_1) = x_0, \quad y(t_2) = y_0$$

to

```
DSolve[x'[t]==a x[t] + b y[t] && y'[t]==c x[t] + d y[t] && x[t1]==x0 &&
y[t2]==y0,{x[t],y[t]},t]
```

Prawdą jest, że może pomóc to wyłącznie w obliczeniach - metodą i zrozumieniem musi każdorazowo wykazać się człowiek.

- Układ równań:

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 5x - 2y \end{cases}$$

Rozwiązanie ogólne:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 (2\cos(t) - \sin(t)) + c_2 (\cos(t) + 2\sin(t)) \\ 5c_1 \cos(t) + 5c_2 \sin(t) \end{bmatrix}$$

☛ Zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{cases} x' = 3x + z \\ y' = 4y \\ z' = x + 3z \end{cases}, \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 5 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{2t} + 3e^{4t} \\ e^{4t} \\ 2e^{2t} + 3e^{4t} \end{bmatrix}$$

☛ Układ równań:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

Rozwiązanie ogólne:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^t + c_2e^{5t} \\ -c_1e^t + 3c_2e^{5t} \end{bmatrix}$$

0.0.6 Przypomnienie z ćwiczeń

Schemat, w jaki rozwiązywaliśmy zadania na ćwiczeniach:

1. Znajdź macierz A, warunki brzegowe $\vec{x}_0$ oraz wektor niejednorodności $\vec{F}(t)$
2. Zdiagonalizuj macierz A, tzn.
   (a) Znajdź wartości własne λ, rozwiązując:
   $$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$$
   (b) Dla każdej wartości własnej, znajdź wektory własne $\vec{v}$:
   $$(A - \lambda\mathbb{I})\,\vec{v} = \vec{0}$$
   (c) Ułóż wektory i wartości własne w macierze:
   $$P = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2], \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$
   (d) Znajdź macierz odwrotną P^{-1}
   $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
3. Oblicz
   $$\exp(tD) = \begin{bmatrix} \exp(t\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(t\lambda_2) \end{bmatrix}$$
4. Oblicz
   $$\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1}$$
5. Oblicz rozwiazanie jednorodne:
   $$\exp(tA)\vec{x}_0$$

6. W przypadku niejednorodnego układu równań, pozostaje obliczyć:

$$\exp{(tA)}\int_0^t \exp{(-\tau A)}\vec{F}(\tau)d\tau$$

7. Złóż rozwiązanie w całość:

$$\vec{x}(t) = \exp{(tA)}\vec{x}_0 + \exp{(tA)}\int_0^t \exp{(-\tau A)}\vec{F}(\tau)d\tau$$

Metoda szeregów potęgowych

W niniejszej sekcji chciałbym jeszcze raz uporządkować metodę rozwiązywania równań różniczkowych metodą szeregów potęgowych. Rozwiążmy równanie:

$$(1-t^2)x''(t) + 4tx'(t) - 4x(t) = 0$$

1. Dzielimy równanie przez $(1-t^2)$ otrzymując:

$$x''(t) + \frac{4t}{1-t^2}x'(t) - \frac{4}{1-t^2}x(t) = 0$$

2. Identyfikujemy funkcje

$$P(t) = \frac{4t}{1-t^2}, \qquad Q(t) = -\frac{4}{1-t^2}$$

3. Stwierdzamy, czy funkcje te są analityczne na otoczeniu jakiegoś t_0, w tym przypadku $t_0 = 0$ spełnia ten warunek

4. Wybieramy rozwiązanie w postaci

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

gdzie c_n są stałymi współczynnikami - musimy znaleźć ich relację.

5. Podstawiamy do oryginalnego równania i wymnażamy wszystkie człony:

$$\begin{aligned}
0 &= (1-t^2)x''(t) + 4tx'(t) - 4x(t) \\
&= (1-t^2)\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right) + 4t\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right) - 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right) \\
&= (1-t^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} + 4t\sum_{n=1}^{\infty} nc_n t^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^n + 4\sum_{n=1}^{\infty} nc_n t^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \\
&= \bigstar
\end{aligned}$$

6. Potrzebujemy otrzymać wyrażnie w postaci:

$$0 = \text{wyrazy wolne} + at + \sum_{n=2}^{\infty} b_n t^n$$

gdzie b_n jest wyrażone jakoś przez c_k z różnymi indeksami. Musimy sprowadzić wszystkie potęgi t do tego samego wykładnika n oraz zacząć od tego samego $n = 2$.

$$\begin{aligned}
\bigstar &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}t^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^n + 4\sum_{n=1}^{\infty} nc_n t^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \\
&= (0+2)(0+1)c_{0+2}t^0 + (1+2)(1+1)c_{1+2}t^1 + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}t^n \\
&\quad - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^n + 4\cdot 1c_1 t^1 + 4\sum_{n=2}^{\infty} nc_n t^n - 4c_0 t^0 - 4c_1 t^1 - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n
\end{aligned}$$

7. Teraz grupujemy wyrazy oraz łączymy szeregi:

$$\begin{aligned}
\bigstar &= 2c_2 - 4c_0 + (6c_3 + 4c_1 - 4c_1)t \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} t^n \Big(c_{n+2}(n+2)(n+1) - n(n-1)c_n + 4nc_n - 4c_n\Big)
\end{aligned}$$

8. Teraz, przyrównujemy to do zera, ponieważ takie było równanie różniczkowe. Można o tym myśleć w dwójnasób:

- Tak jak próbowałem wytłumaczyć na ćwiczeniach, traktujemy rzeczony szereg podobnie do wielomianów[1]. Wielomian jest wielomianem zerowym (elementem neutralnym dodawania w pierścieniu wielomianów) jeśli nie występują żadne niezerowe współczynniki. Tutaj również, otrzymaliśmy równanie w postaci:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = f(t)$$

  Skoro ten szereg ma być równy zeru, a t jest dowolne (z określonego przedziału), zatem **każdy** współczynnik b_n musi wynosić zero.

- Padło pytanie, czy możemy o tym myśleć w kontekście zerowania się kolejnych pochodnych. W pewnym sensie: tak. Skoro założyliśmy, że wszystkie te funkcje są analityczne, możemy policzyć dowolne pochodne i określić ich wartość w punkcie $t_0 = 0$[2]. Dowolna pochodna z zera (lewa strona równania) to zawsze zero. Zatem:

$$\begin{aligned}
&0 = f(0) = b_0 \\
&0 = f'(0) = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n t^{n-1}\Big|_{t=0} = b_1 \\
&0 = f''(0) = \frac{d^2}{dt^2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\Big|_{t=0} = \sum_{n=2}^{\infty} b_n n(n-1) t^{n-2}\Big|_{t=0} = 2b_2 \\
&\vdots \\
&0 = \frac{d^k}{dt^k}\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\Big|_{t=0} = \sum_{n=k}^{\infty} b_n \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}\Big|_{t=0} = k!\, b_k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

[1] Tylko dopuszczamy tutaj "nieskończone wielomiany" - dlatego mówimy o szeregu. To jest sposób porównania, nie zaś zabieg matematyczny. Choć, jak się za chwilę okaże, w tym szczególnym przypadku mamy doczynienia faktycznie z wielomianem.

[2] Zawsze rozwijamy w szereg wokół jakiegoś punktu, bierzemy pochodną w tym właśnie punkcie.

9. Zatem, przyrównując do zera otrzymane równanie, dostajemy:

$$\begin{aligned}
0 &= 2c_2 - 4c_0 \implies c_2 = 2c_0 \\
0 &= 6c_3 \implies c_3 = 0 \\
0 &= c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n\Big(n(n-1) - 4n + 4\Big) \\
&= c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n\Big(n^2 - 5n + 4\Big) \\
&= c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n(n-1)(n-4) \\
&\implies c_{n+2} = \frac{(n-1)(n-4)}{(n+1)(n+2)}c_n
\end{aligned}$$

10. Otrzymaliśmy rekurencyjny wzór, wyznaczający parzyste współczynniki funkcji.

☛ Na zajęciach tego nie zrobiliśmy, założyłem bowiem, że każdy da radę to policzyć. Zwrócono mi jednak uwagę, że powinniśmy byli sprawdzić, czy (a jeśli tak, to gdzie) kończą się szeregi (czyli otrzymujemy wielomiany). Taki proces musi zostać przeprowadzony na kolokwium oraz egzaminie podczas rozwiązywania zadań.
W naszym przypaku widzimy, że dla $n = 4$ licznik ułamka się zeruje - otrzymamy zatem wielomian. Policzmy kolejne współczynniki:

$$\begin{aligned}
c_0 &= c_0 \\
c_2 &= 2c_0 \\
c_4 &= c_{2+2} = \frac{(2-1)(2-4)}{(2+1)(2+2)}c_2 = -\frac{2}{12} \cdot 2c_0 = -\frac{1}{3}c_0 \\
c_6 &= c_{4+2} = \frac{(4-1)(4-4)}{(4+1)(4+2)}c_4 = 0
\end{aligned}$$

11. Zatem jednym z rozwiązań jest wielomian:

$$x_1(t) = 1 + 2t^2 - \frac{1}{3}t^4$$

12. Czasami otrzymamy dwie relacje rekurencyjne, najczęściej dla parzystych i nieparzystych współczynników. Wtedy stałe c_0, c_1 wyznaczamy z warunków brzegowych. Pamiętajmy, że równanie drugiego stopnia ma dwuwymiarową przestrzeń rozwiązań. Zatem tutaj, potrzebujemy znaleźć również drugie rozwiązanie.

13. Do znalezienia drugiego rozwiązania, wykorzystamy znaną nam już uprzednio metodę: wrońskian i wzór Abela:

$$\begin{aligned}
W(t) &= C\exp\left(-\int \frac{4t}{1-t^2}dt\right) \left| \begin{array}{c} u = 1 - t^2 \\ du = -2tdt \end{array} \right| \\
&= C\exp\left(2\int \frac{1}{u}du\right) \\
&= \tilde{C}\exp\left(2\ln(u)\right) \\
&= \tilde{C}\exp\left(2\ln\left(1-t^2\right)\right) \\
&= \tilde{C}\left(1-t^2\right)^2
\end{aligned}$$

Ponieważ szukamy rozwiązania ogólnego do stworzenia przestrzeni rozwiązań (rozwiązanie to zostanie później i tak przeskalowane przed odpowiedni parametr dopasowujacy je do warunków początkowych), zatem możemy pominąc teraz stałą $\tilde{C}$. Zatem:

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= x_1(t) \int \frac{W(t)}{(x_1(t))^2} dt \\
&= \left(1 + 2t^2 - \frac{1}{3}t^4\right) \int \frac{(1-t^2)^2}{\left(1 + 2t^2 - \frac{1}{3}t^4\right)^2} dt \\
&= \left(1 + 2t^2 - \frac{1}{3}t^4\right) \int \left(\frac{1-t^2}{1 + 2t^2 - \frac{1}{3}t^4}\right)^2 dt \\
&= \left(1 + 2t^2 - \frac{1}{3}t^4\right) \frac{t}{\left(1 + 2t^2 - \frac{1}{3}t^4\right)} + \left(1 + 2t^2 - \frac{1}{3}t^4\right) constant
\end{aligned}$$

Stąd ostateczne rozwiązanie:

$$x(t) = \alpha \left(1 + 2t^2 - \frac{1}{3}t^4\right) + \beta t$$