# 21/10/2025

## Wielokrotny pierwiastek wielomianu charkterystycznego

Niech zadane będzie liniowe jednorodne równanie różniczkowe stopnia $N$ o stałych współczynnikach:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n f}{dt^n} = 0. \tag{1}$$

Równanie to, ze względu na liniowy charakter pochodnej, możemy zapisać pod postacią operatora liniowego w działaniu na funkcję:

$$\hat{D} = \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n}{dt^n}, \qquad \hat{D} f = 0. \tag{2}$$

Z kolei wielomian charakterystyczny będzie zadany jako:

$$w(r) = \sum_{n=0}^{N} a_n r^n. \tag{3}$$

**Twierdzenie 0.1.** *Jeśli wielomian charakterystyczny* (3) *można rozłożyć do postaci:*

$$w(r) = q(r) \cdot (r - \alpha)^k \tag{4}$$

*dla pewnego* $k \in \{1, ...., N\}$*, tzn.* $\alpha \in \mathbb{C}$ *jest* $k$*-krotnym pierwiastkiem tego wielomianu, wówczas istnieje* $k$ *rozwiązań w postaci:*

$$f_j(t) = t^{j-1} e^{\alpha t}, \qquad j \in \{1, ...., k\} \tag{5}$$

*Dowód.* Ze względu na

- fakt, że współczynniki równania różniczkowego (1) są stałymi, tzn. korzystając z liniowości:
$$\frac{d}{dt} a_n = 0 \implies \frac{d}{dt}\Big(a_n f(t)\Big) = a_n \frac{df}{dt}$$
- równanie jest równaniem jednej zmiennej

zatem proste podstawienie operatora różniczkowego:

$$w(r) \mapsto \hat{w}\left(\frac{d}{dt}\right) = \hat{D}$$

zmienia wielomian charakterystyczny w równanie operatorowe. Zastępujemy jedynie mnożenie i potęgowanie poprzez wielokrotne aplikowanie pochodnych. Wówczas, zapisane jawnie:

$$\hat{D} = \hat{q}\left(\frac{d}{dt}\right) \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^k$$

Licząc działanie takiego operatora na kolejne sugerowane rozwiązania (5):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) f_j(t) &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left(t^{j-1} e^{\alpha t}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(t^{j-1} e^{\alpha t}\right) - \alpha t^{j-1} e^{\alpha t} \\
&= (j-1)\, t^{j-2} e^{\alpha t} + t^{j-1} \alpha e^{\alpha t} - \alpha t^{j-1} e^{\alpha t} \\
&= (j-1)\, f_{j-1}(t)
\end{aligned}$$

w szczególności:

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) f_1(t) = 0 =: f_0(t)$$

Zatem:

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^k f_j(t) = f_{j-k}(t) \cdot \prod_{l=1}^{k-1} (j-l)$$

Ponieważ zaś $k \geqslant j$, zatem:

- albo dla pewnego $l = j$ iloczyn się zeruje
- albo $k = j$, zatem zeruje się funkcja, $f_{j-k} = f_0 = 0$

Niniejszym udowodnione zostało, że każde rozwiązanie tej postaci spełnia równanie różniczkowe:

$$\hat{D} f_j(t) = \hat{q}\left(\frac{d}{dt}\right) \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^k f_j(t) = \hat{q}\left(\frac{d}{dt}\right) 0 = 0$$

Pozostało udowodnić, że rozwiązania te są faktycznie liniowo niezależne. Zatem, odwołując się do definicji: układ funkcji (lub szerzej, wektorów) jest liniowo niezależny gdy:

$$\sum_{n=1}^{k} c_n f_n(t) = 0 \implies \forall n \in \{1, ...., k\} \; c_n = 0$$

Tymczasem:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} c_n f_n(t) &= \sum_{n=1}^{k} c_n t^{n-1} e^{\alpha t} \\ &= e^{\alpha t} \sum_{n=1}^{k} c_n t^{n-1} \end{aligned}$$

Suma ta jest wielomianem stopnia $k - 1$. Wielomian zaś jest tożsamościowo równy zeru wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego współczynniki się zerują. Zatem układ ten nie jest liniowo zależny. $\square$

## Rozwiązania rzeczywiste i urojone

Na ostatnich zajęciach padło pytanie, dlaczego, gdy podczas rozwiązania dotychczasowych równań otrzymamy rozwiązania zespolone, możemy swobodnie wziąć po prostu część rzeczywistą i urojoną jako dwa rozwiązania. Przypomnijmy, że mówiliśmy wówczas o **liniowych, jednorodnych równaniach różniczkowych** jednej zmiennej. Moje ówczesne tłumaczenie sprowadziło się do tego, że mamy rozwiązania zespolone, które są matematycznie poprawne, jednak jesteśmy w stanie wprowadzić odpowiednie parametry początkowe tak, aby ograniczyć się do rozwiązań rzeczywistych, ponieważ:

$$ae^{i\phi} + be^{-i\phi} = A\cos(\phi) + B\sin(\phi)$$

dla

$$A = a + b \qquad\qquad B = i(a - b)$$

a ponieważ mamy swobodę wyboru, ograniczamy się wyłacznie do rzeczywistych $A, B$. Powyższe rozwiązanie wynika z liniowości.

Jeśli jednak kogoś nie satysfakcjonuje takie uzasadnienie, które faktycznie może wydawać się zbędnie skomplikowane lub nieintuicyjne, wymaga wyobraźni geometrycznej lub po prostu dziwi ograniczanie rozwiązań, poniżej przedstawiam prostsze, odwołujące się wyłącznie do podstawienia oraz równości liczb zespolonych.

Nasze równanie jest liniowe, więc podobnie jak wcześniej, możemy przedstawić je pod postacią:

$$0 = \hat{D}(t)f(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n(t)\frac{d^n f}{dt^n}$$

gdzie dopuszczamy, aby współczynniki $a_n$ były funkcjami parametru różniczkującego. Załóżmy, że funkcja [1] $F \in \mathcal{C}^N(\mathbb{R};\mathbb{C})$ jest rozwiązaniem tego równania różniczkowego. Zatem, korzystając wyłącznie z liniowości pochodnej (funkcje można dodawać przed/po pochodnej, mnożenie przez liczbę, ównież zespoloną, tak samo) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
0 &= \hat{D}(t)F(t)\\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n(t)\frac{d^n F}{dt^n}\\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}\Big(\Re(F(t)) + i\Im(F(t))\Big)\\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n(t)\left(\frac{d^n}{dt^n}\Big(\Re(F(t))\Big) + i\frac{d^n}{dt^n}\Big(\Im(F(t))\Big)\right)\\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}\Big(\Re(F(t))\Big) + i\sum_{n=1}^{N} a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}\Big(\Im(F(t))\Big)\\
&= \hat{D}(t)\Re(F(t)) + i\hat{D}(t)\Im(F(t))
\end{aligned}$$

Wiemy zaś, że funkcje $\Re(F(t))$, $\Im(F(t))$ są funkcjami rzeczywistymi. Ponieważ porównując liczby zespolone należy porównać osobno część rzeczywistą i część urojoną, widzimy że:

$$\hat{D}(t)\Re(F(t)) = 0 \qquad\qquad \hat{D}(t)\Im(F(t)) = 0$$

[1] dalszy zapis oznacza że jest to funkcja o ciągłych pochodnych aż do $N$-tej pochodnej włącznie, przyjmująca parametr rzeczywisty a zwracająca wynik zespolony

Czyli każda z nich jest rzeczywistym rozwiązaniem początkowego równania różniczkowego, nie potrzeba nam zaś całej funkcji zespolonej.

Dla formalności sprawdźmy jeszcze, kiedy są to rozwiązania niezależne liniowo. W tym celu rozłóżmy:

$$F(t) = r(t)e^{i\phi(t)}$$

otrzymując

$$\begin{aligned}
W(t) &:= \det \begin{bmatrix} \Re(F(t)) & \Im(F(t)) \\ \frac{d}{dt}\Re(F(t)) & \frac{d}{dt}\Im(F(t)) \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} r(t)\cos(\phi(t)) & r(t)\sin(\phi(t)) \\ \frac{d}{dt}(r(t)\cos(\phi(t))) & \frac{d}{dt}(r(t)\sin(\phi(t))) \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} r\cos(\phi) & r\sin(\phi) \\ r'\cos(\phi) - r\sin(\phi)\phi' & r'\sin(\phi) + r\cos(\phi)\phi' \end{bmatrix} \\
&= r\cos(\phi)\left(r'\sin(\phi) + r\cos(\phi)\phi'\right) - r\sin(\phi)\left(r'\cos(\phi) - r\sin(\phi)\phi'\right) \\
&= rr'\cos(\phi)\sin(\phi) + r^2\cos^2(\phi)\,\phi' - rr'\sin(\phi)\cos(\phi) + r^2\sin^2(\phi)\,\phi' \\
&= r^2\phi'
\end{aligned}$$

Rozważenie implikacji pozostawiam Państwu.