

Lista dodatkowa – logika

1 Podstawowa logika

1. Znajdź wartość logiczną poniższych zdań:

(a) $\left((2 < 5) \wedge (7 < 7) \right) \implies (8 = 3)$

(b) $\sim \left((1 = 2) \iff \left(\left((6/7 \in \mathbb{Q}) \iff (0! = 1) \right) \wedge (8 \leq 9) \right) \right)$

(c)

2. Spróbuj stworzyć losową tabelkę logiczną dla trzech zdań składowych $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, a następnie korzystając ze znanych ci spójników logicznych, ułóż zdanie które ją spełnia.
3. Znajdź błędy w dowodach poniższych fałszywych twierdzeń.

(a) "*Twierdzenie*": Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $n = n + 1$

"*Dowód*": Stosując dowód indukcyjny, założmy prawdziwość dla $n = 1$. Wówczas poprzez dodanie jedności obustronnie:

$$m = (n + 1) = n + 1 \stackrel{ind}{=} (n + 1) + 1 = m + 1$$

A zatem indukcyjnie zachodzi to dla każdego $m, n \in \mathbb{N}$.

(b) "*Twierdzenie*": Suma dwóch liczb podzielnych przez 5 jest podzielna przez 10.

"*Dowód*": Niech $a = b + c$ dla b, c będących liczbami naturalnymi podzielnymi przez 5. Oznacza to, że $b = 5 \cdot \alpha$ dla pewnej naturalnej liczby α , a także $c = 5 \cdot \alpha$. Zatem:

$$a = b + c = 5\alpha + 5\alpha = 10\alpha$$

Z czego otrzymujemy twierdzenie.

(c) "*Twierdzenie*": Liczbanie niepodzielna przez 4 nie jest parzysta.

"*Dowód*": Niech $p = (2|n)$ oraz $q = (4|n)$. Mamy oczywistą implikację:

$$q \implies p$$

zatem

$$\sim p \implies \sim q$$

4. Zdefiniujmy spójnik logiczny Sheffera $\uparrow$ jako: $\xi \uparrow \zeta = \sim (\xi \wedge \zeta)$. W języku informatycznym nazywany jest zwykle NAND. Pokaż, że za jego pomocą można zdefiniować wszystkie pozostałe, znane ci spójniki logiczne (negacja, koniunkcja, alternatywa,

alternatywa wyluczająca, implikacja, równoważność) – własność tę nazywamy funkcjonalną pełnością.

Zadanie możesz wykonać z wykorzystaniem tabelki logicznej, jednak zachęcam aby spróbować bez, wykorzystując ciąg relacji oraz znane tożsamości.

Podpowiedź: wykorzystaj znane relacje z zadania 1. na liście 1 od wykładowcy.

Sugestia: Spróbuj wyrazić zdefiniowany spójnik logiczny przez inne znane, w tyle kombinacji ile możesz wymyślić.

5. Zdefiniujmy spójnik logiczny Peirce’a $\downarrow$ jako: $\xi \downarrow \zeta = \sim (\xi \vee \zeta)$. W języku informatycznym nazywany jest zwykle NOR. Pokaż, że za jego pomocą można zdefiniować wszystkie pozostałe, znane ci spójniki logiczne (negacja, koniunkcja, alternatywa, alternatywa wyluczająca, implikacja, równoważność) – własność tę nazywamy funkcjonalną pełnością.

Zadanie możesz wykonać z wykorzystaniem tabelki logicznej, jednak zachęcam aby spróbować bez, wykorzystując ciąg relacji oraz znane tożsamości.

Podpowiedź: wykorzystaj znane relacje z zadania 1. na liście 1 od wykładowcy.

Sugestia: Spróbuj wyrazić zdefiniowany spójnik logiczny przez inne znane, w tyle kombinacji ile możesz wymyślić.

2 Indukcja matematyczna

1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Uwaga: Sumę po prawej stronie zwięźle zapiszemy zwykle jako:

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i$$

2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1 + 4 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Pokaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ ma nierówność:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

4. **Nierówność Bernoulliego:** Udowodnij, że dla każdego $x > -1$, $x \neq 0$ oraz liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi:

$$(1+x)^n > 1+nx$$

. **Uwaga:** Uzasadnij każde z założeń.

- ☛ Dla $a, b \in \mathbb{N}$ $b|a$ czytamy "b dzieli a" lub "a jest podzielne przez b" i oznacz, że $\exists k \in \mathbb{N} : k \cdot b = a$.

Udowodnij, że:

- $\forall n \in \mathbb{N} : 3|n^3 + 2n$
- $\forall n \in \mathbb{N} : 7|n^7 - 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : 10|2^{2^n} - 6$
- $\forall n \in \mathbb{N} : 8|5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$